Inspiratiedag Wiskunde 1A - Vlaamse Overheid

Navorming Wiskunde

Mee met de nieuwe eindtermen 1A:

Logica, Bewijzen & Verzamelingen

Auteurs
Filip Moons

Datum
12/12/2019

Vlaamse Overheid © 2019

Inhoudsopgave

1 Inleiding **5**
1.1 Wie zijn de navormers? . . . 6
1.2 Overzicht reader . . . 6
1.3 Met dank aan... Uitwiskeling . . . 6

2 De nieuwe eindtermen rond redeneren en abstraheren **7**
2.1 Situering . . . 7
2.1.1 Eindterm 6.17 rond logica & bewijzen . . . 7
2.1.2 Eindterm 6.18 rond verzamelingenleer . . . 9
2.2 Bouwstenen van de eindtermen wiskunde . . . 10

3 Logica: Implicatie ⇒ & Equivalentie ⇔ **11**
3.1 Implicatie versus equivalentie: theoretisch kader . . . 11
3.1.1 Implicatie . . . 11
3.1.2 Equivalentie . . . 13
3.2 Implicaties en equivalenties in de klas . . . 14
3.2.1 Stap 1: spel met concrete voorbeelden . . . 15
3.2.2 Stap 2: introduceer het begrippenkader . . . 15
3.2.3 Stap 3: Wiskundevoorbeelden . . . 16

4 Bewijzen: redeneren & argumenteren **17**
4.1 Inleiding . . . 17
4.1.1 Waarom bewijzen? . . . 17
4.1.2 Overzicht hoofdstuk . . . 18
4.2 Wat zijn redeneringen? . . . 18
4.2.1 Redeneringen in de klas . . . 19
4.3 Rekenen met lettervormen: Goocheltrucs . . . 19
4.3.1 Bewijs 1: Het getal is 7 . . . 19
4.3.2 Bewijs 2: Ik lees je gedachten . . . 21
4.3.3 Bewijs 3: Kaart raden . . . 22
4.3.4 Bewijs 4: Obscuur optellen . . . 24
4.3.5 Bewijs 5: Het wondergetal . . . 25
4.4 Deelbaarheid, even & oneveven . . . 26
4.4.1 Bewijs 1: De som van drie opeenvolgende getallen is een drievoud . . . 27
4.4.2 Bewijs 2: Deelbaarheidskenmerk van 9 . . . 27
4.4.3 Bewijs 3: Goocheltruc - Symbool voorspellen . . . 28

4.4.4 Bewijs 4: Som van twee oneven getallen is even . . . 30
4.4.5 Bewijs 5: Product van twee oneven getallen is oneven . . . 30
4.4.6 Bewijs 6: Het kwadraat van twee even getallen is even . . . 30
4.4.7 Bewijs 7: Goocheltruc - De ringdrager . . . 31
4.4.8 Bewijsjes met veelvouden . . . 31
4.5 Redeneren met patronen en formules . . . 32
4.5.1 Bewijs 1: Een huizenrij met lucifers . . . 32
4.5.2 Bewijs 2: Een groeiende rechthoek . . . 33
4.5.3 Bewijs 3: De takken van een boom . . . 33
4.6 Twee evenwijdigen en een snijlijn . . . 34
4.6.1 Eigenschappen van hoeken bij evenwijdige rechten vaststellen . . . 34
4.6.2 Deze eigenschappen bewijzen . . . 36
4.6.3 De omgekeerde eigenschappen vaststellen . . . 36
4.6.4 De omgekeerde eigenschappen bewijzen . . . 37
4.7 Som van de hoeken van een driehoek . . . 38
4.7.1 Bewijs 1: Het scheurbewijs . . . 39
4.7.2 Bewijs 2: bewijs met een evenwijdige . . . 39
4.7.3 Bewijs 3: met een telegeleide auto . . . 40
4.7.4 Hoekensommen in andere veelhoeken . . . 40
4.8 Bewijzen met congruente driehoeken . . . 42
4.8.1 Middelloodlijn en bissectrice . . . 44
4.8.2 De gelijkbenige driehoek . . . 46
4.8.3 Eigenschappen en kenmerken van vierhoeken . . . 48
4.8.4 Middenparallel en de stelling van Varignon . . . 51
4.9 Bewijzen over en met oppervlakte . . . 54
4.9.1 Bewijs zonder woorden: Het merkwaardig product $(a+b)^2$ . . . 54
4.9.2 De oppervlakte van een driehoek en van een parallellogram . . . 55
4.9.3 De stelling van Viviani . . . 57

5 Verzamelingenleer: operaties op 2 verzamelingen 59
5.1 Activiteit 1: Klassikale introductie rond de notie van verzamelingen . . . 59
5.2 Activiteit 3: Getalverzamelingen . . . 63
5.3 Activiteit 3: Sterren jagen . . . 64
5.4 Activiteit 4: Vlugge verzamelingen . . . 65

Hoofdstuk 1

Inleiding

Logica, bewijzen en verzamelingen zijn verrassend leuke nieuwigheden in de eindtermen wiskunde voor de eerste graad. Met deze navorming willen we alle aanwezigen handvaten aanreiken om er didactisch bevlogen mee om te gaan. We laten diverse, activerende manieren zien om deze abstractere leerstof tot leven te wekken bij leerlingen: we ontdekken logische spelletjes, zinnige manieren om de implicatie en equivalentie bevattelijk te maken, welke soort bewijsjes je - afhankelijk van je leerlingenpubliek - allemaal aan bod kan laten komen en hoe je op een zinnige manier verzamelingen doorheen de lessen van de eerste graad weeft. We willen hierbij volgende doelstellingen nastreven:

- Je leert de als-dan-relatie (implicatie) en als-en-slechts-als-relatie (equivalentie) op een activerende en verfrissende manier te verwerken in je lessen.
- Je ontdekt een ruim aanbod aan mogelijke bewijzen/redeneringen die je, afhankelijk van je leerlingenpubliek, kan behandelen.
- Je leert verzamelingenleer op een zinvolle manier door je lessen te weven.

De reader is een geschreven neerslag van deze workshop, alsook een handige inspiratiegids met extra materiaal.

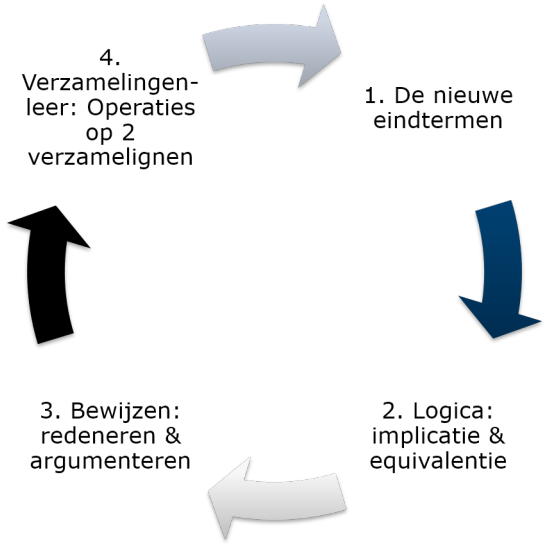
Veel leesplezier!

Filip Moons

1.1 Wie zijn de navormers?

- **Filip Moons**
  ... is doctoraal onderzoeker binnen de didactiek wiskunde (FWO-aspirant) en lerarenopleider aan de Universiteit Antwerpen. Tot voor kort leraar wiskunde aan het Hoofdstedelijk Atheneum Karel Buls. Schrijft als vertegenwoordiger van de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars mee aan de nieuwe eindtermen wiskunde en is tevens redactielid van Uitwiskeling.
  filip.moons@uantwerpen.be | 0494 03 43 83

1.2 Overzicht reader



Figuur 1.1: *Overzicht reader*

1.3 Met dank aan... Uitwiskeling

Deze reader is grotendeels gebaseerd op artikels uit Uitwiskeling (o.a Onder de loep: 'Redeneren en bewijzen in de eerste graad' [Roelens, 2019]). Blijf geïnspireerd en word abonnee via `www.uitwiskeling.be`! Voor 24 euro heb je een jaar lang volledige toegang tot 35 jaar Uitwiskeling & ontvang je 4 nummers in de bus.

Hoofdstuk 2

De nieuwe eindtermen rond redeneren en abstraheren

2.1 Situering

Deze workshop focust zich op 2 eindtermen: 6.17 (zie Tabel 2.1) en 6.18 (zie Tabel 2.2). Beiden ressorteren ze onder de wiskundige bouwsteen '*Redeneringen opbouwen en abstraheren rekening houdend met de samenhang en structuur van wiskunde.*' De bedoeling van deze eindtermen is ze te realiseren *terwijl* er andere eindtermen gerealiseerd worden: bv. een interessante meetkundige eigenschap die je bewijst met leerlingen, bij het introduceren van de nieuwe getalverzameling $\mathbb{Z}$, eens gaan kijken met de doorsnede met $\mathbb{N}$,... Het zijn dus geen eilanden die als compleet aparte stukjes leerstof aan bod hoeven te komen, maar best doorweefd worden met andere inhoudelijke eindtermen. In deze workshop reiken we dan ook talloze voorbeelden aan om dat te realiseren.

De eindtermen zouden met een beetje basiskennis van de (herziene) *Taxonomie van Bloom* ondubbelzinnig interpreteerbaar moeten zijn, al blijkt dat in de praktijk toch heel wat vragen op te roepen. Het is belangrijk om als onderwijsprofessional het hoofd koel te houden en goed te beseffen dat de *Taxonomie van Bloom* in hoofdzaak een format is waarin alle verschillende ontwikkelcommissies hun eindtermen moesten formuleren om zo tot een transparant, evalueerbaar en coherent geheel te komen. De eindtermen zijn ook altijd opgesteld met wiskunde op de eerste plaats en pas nadien hertaald in het format van de *Taxonomie van Bloom* en dus niet omgekeerd. We bespreken nu de twee eindtermen apart en streven daarbij een ondubbelzinnige interpretatie na.

2.1.1 Eindterm 6.17 rond logica & bewijzen

Als we eens grondig kijken naar eindterm 6.17 dan worden er een aantal zaken opgelegd: eerst en vooral moeten de leerlingen de symbolen voor een implicatie ($\Rightarrow$) en equivalentie ($\Leftrightarrow$) kunnen hanteren. Zij staan dan ook opgenomen als **feitenkennis**.

Daarnaast zijn er een aantal zaken als **conceptuele kennis** opgenomen: de leerlingen moe-

6.17 De leerlingen geven een wiskundige redenering of een argumentatie van wiskundige eigenschappen.	
Feitenkennis	- Symbolen: $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$
Conceptuele kennis	- Als dan-relatie (implicatie), equivalentie - Wiskundige eigenschappen uit de eindtermen van de eerste graad A-stroom zoals: * congruentiekenmerken ZZZ, ZHZ, HZH, ZHH, * eigenschappen van transformaties, * eigenschappen van driehoeken en vierhoeken, * merkwaardige producten $(a+b)^2$ en $(a+b)(a-b)$, * eenvoudige en concrete getalbewijzen
Beheersingsniveau	Cognitieve dimensie: beheersingsniveau evalueren
Context	De eindterm wordt zowel met als zonder context gerealiseerd.

Tabel 2.1: *Eindterm 6.17 rond logica & bewijzen*

ten een onderscheid kunnen maken tussen een wiskundige relatie die slechts in één richting geldt (een als-dan-relatie of implicatie) en een wiskundige uitspraak die in twee richtingen werkt (een als-en-slechts-als-relatie of equivalentie). Daarnaast wordt er inzicht verwacht in een aantal redeneringen of argumentaties van geziene wiskundige eigenschappen opgesomd met een **zoals-constructie**. Een zoals-constructie betekent dat de eindterm oplegt dat er redeneringen/argumentaties (lees: eenvoudige bewijzen) moeten gezien worden, maar dat de eindterm openlaat over wat deze bewijsjes precies moeten gaan. De eindterm doet met een zoals-constructie dus louter enkele voorstellen waarover zulke eenvoudige bewijsjes kunnen gaan: bv. bewijzen dat twee driehoeken congruent zijn a.h.v. de congruentiekenmerken, de eigenschappen over transformaties, over driehoeken en vierhoeken (bv. bewijzen dat de diagonalen in een vierkant evenlang zijn), de merkwaardige producten bewijzen en eenvoudige en concrete getalbewijzen (bv. het kwadraat van een even getal is even). Door het woordje 'zoals' kan je als leraar afhankelijk van de leerlingenpopulatie een keuze maken voor bepaalde eenvoudige bewijsjes. Daarnaast mag je het niveau van de bewijsjes en de frequentie waarin eigenschappen bewezen worden, afstemmen op je leerlingengroep.

Vervolgens is ook het **cognifief beheersingsniveau** aangegeven, dat is een component dat onlosmakelijk verbonden is met de *Taxonomie van Bloom*. Het beheersingsniveau staat hier op *evalueren*. Dan heeft te maken met de leerlingactiviteiten die beoogt worden met deze eindterm: leerlingen moeten *evalueren* of een uitspraak een equivalentie dan wel een implicatie is, moeten de geldigheid van een wiskundige redenering of argument kunnen beoordelen (en zo nodig met een tegenvoorbeeld ontrkachten), moeten bij pakweg congruentiebewijsjes enkele overeenkomsten ontdekken tussen driehoeken die samen een geschikt congruentiekenmerk vormen,... Vooral het oordelend karakter maakt dat deze eindterm op *evalueren* terecht kwam. Analyseren had zeker gekund als cognitieve dimensie, maar het oordelend karakter vereist complexere denkvaardigheden dan louter inzicht in geziene bewijsjes. Eveneens was creëren een optie geweest, maar dat zou impliceren dat alle leerlingen ook zelf ongeziene bewijsjes zouden moeten kunnen opstellen. Dat verwacht de eindterm niet voor alle leerlingen.

Zoals in alle eindtermen wiskunde van de A-stroom beoogt men het realiseren van elke eind-

term met en zonder context. Een context kan hier een louter wiskundige context zijn (je bewijst eigenschappen over bv. driehoeken, dan zijn de driehoeken hier je context), maar kan eveneens slaan op het werken van concreet-naar-abstract in de klaspraktijk: je onderzoekt op enkele concrete voorbeelden of een bepaalde wiskundige eigenschap vermoedelijk waar is en indien ja, generaliseer je dit tot een algemeen bewijs.

2.1.2 Eindterm 6.18 rond verzamelingenleer

Eindterm 6.18 rond verzamelingenleer beoogt het uitvoeren van operaties met twee verzamelingen. Hierbij hoort **feitenkennis** het correct kunnen hanteren van de symbolen $\cap, \cup, \setminus, \in, \notin, \subset, \not\subset$.

Als **conceptuele kennis** moeten leerlingen inzicht krijgen in enkele operaties op verzamelingen: een object is al dan niet een element van een verzameling, een verzameling is al dan niet een deelverzameling van een andere verzameling. Een leerling moet inzicht hebben in de begrippen doorsnede, unie en verschil van twee verzamelingen. Concreet zal dit inzicht zich vertalen in het kunnen uitvoeren van een aantal procedures, waardoor je bij de **procedurele kennis** exact dezelfde kennisafbakening ziet staan als bij de conceptuele kennis. Leerlingen moeten dus kunnen bepalen of een object is van een verzameling of niet, moeten kunnen bepalen of een verzameling een deelverzameling is van een andere verzameling, de leerlingen moeten de doorsnede, de unie en het verschil van twee verzamelingen kunnen bepalen.

Het cognitief beheersingsniveau beperkt zich hier tot **toepassen**: het is voldoende dat leerlingen de kenniselementen bij de conceptuele & procedurele kennis kunnen uitvoeren, zonder meer.

Net zoals bij alle andere eindtermen wiskunde van de eerste graad A-stroom moet de eindterm hier met en zonder context toegepast worden. Concreet betekent dit dat we verzamelingen uit het dagelijks leven kunnen behandelen (bv. alle leerlingen met blond haar, alle leerlingen met blauwe ogen) als meer abstracte voorbeelden zonder context. Een evidente context zijn de getallenverzamelingen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Hoewel dit zeker een zeer geschikte, passende context is, hoeft dit van de eindterm in strikte zin niet. Ook bij de uitgangspunten die geschreven werden bij het decreet die de nieuwe eindtermen goedkeurde, staat letterlijk dat het mag beperkt blijven tot operaties op erg kleine, eenvoudige verzamelingen (bv. minder dan 10 elementen).

6.18 De leerlingen voeren operaties met twee verzamelingen uit.	
Feitenkennis	- $\cap, \cup, \setminus, \in, \notin, \subset, \not\subset$
Conceptuele kennis	- Element, deelverzameling, doorsnede, unie, verschil
Procedurele kennis	- Element, deelverzameling, doorsnede, unie, verschil
Beheersingsniveau	Cognitieve dimensie: beheersingsniveau toepassen
Context	De eindterm wordt zowel met als zonder context gerealiseerd.

Tabel 2.2: *Eindterm 6.18 rond verzamelingen*

2.2 Bouwstenen van de eindtermen wiskunde

Om de consistentie en coherentie van de eindtermen over de verschillende graden heen te bewaken, werden per sleutelcompetentie enkele bouwstenen afgebakend. Deze bouwstenen zijn generiek geformuleerd en dragen geen niveau in zich, maar geven een inhoudelijke richting aan voor de verschillende graden van het secundair onderwijs. De concrete invulling ervan en het niveau worden in de eindtermen per stroom (1e graad) of finaliteit (2e en 3e graad) bepaald. Het zijn eigenlijk kapstokken om de eindtermen toch wat te structureren. Vermits de eindterm over logica/redeneren/argumenteren bij uitstek een eindterm is die je bijna nooit op zichzelf, maar bijna altijd in combinatie met andere eindtermen realiseert, zullen we met onderstaande logo's uit Figuur 2.1 vaak verwijzen naar een groep eindtermen die je gelijktijdig aan het realiseren bent als je met één van de voorbeelden in de cursus. Op die manier maken we visueel duidelijk bij welke andere inhoudelijke eindtermen bepaalde voorbeelden aansluiten. De logo's zijn afkomstig van de 'Infonamiddag eindtermen wiskunde' die de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars vorig jaar organiseerde voor 400 wiskundeleraars:

- **Getallenleer**
  Inzicht ontwikkelen in en omgaan met getallen en hoeveelheden: getallenleer.
- **Meetkunde**
  Inzicht ontwikkelen in en omgaan met ruimte en vorm: meetkunde en metend rekenen.
- **Relaties & verandering**
  Inzicht ontwikkelen in en omgaan met relatie en verandering: zoals algebra, analyse en discrete structuren.
- **Statistiek (Data en onzekerheid)**
  Inzicht ontwikkelen in en omgaan met data en onzekerheid: zoals kansrekenen en statistiek
- **Abstractie**
  Redeneringen opbouwen en abstraheren rekening houdend met de samenhang en structuur van wiskunde.
- **Problem Solving**
  Modelleren en problemen oplossen door analyseren, (de)mathematiseren of aanwenden van heuristieken.

Figuur 2.1: *De 6 bouwstenen van de eindtermen wiskunde*

Hoofdstuk 3

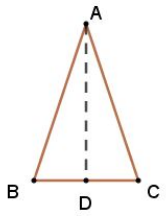
Logica: Implicatie $\Rightarrow$ & Equivalentie $\Leftrightarrow$

3.1 Implicatie versus equivalentie: theoretisch kader

3.1.1 Implicatie

Als een driehoek gelijkzijdig is, **dan** is ze ook gelijkbenig.

Deze uitspraak is een eenvoudig voorbeeld van een implicatie. Als het waar is dat een driehoek gelijkzijdig is, dan kunnen we daar meteen uit opmaken dat de driehoek ook gelijkbenig is. Het geldt echter niet omgekeerd: onderstaande gelijkbenige driehoek is duidelijk **geen** gelijkzijdige driehoek. De redenering geldt dus niet omgekeerd.



Figuur 3.1

We zeggen ook wel dat het gelijkzijdig zijn van een driehoek een **voldoende voorwaarde** is voor gelijkbenigheid. Weten dat een driehoek gelijkzijdig is, is voldoende om te besluiten dat hij gelijkbenig is. Het is echter geen noodzakelijke (nodige) voorwaarde voor gelijkbenigheid: er zijn ook andere gelijkbenige driehoeken die niet gelijkzijdig zijn (zoals het voorbeeld).

Gelijkbenig zijn is echter wel een **nodige voorwaarde** om gelijkzijdig te zijn: uit de implicatie volgt noodzakelijkerwijs dat als een driehoek gelijkzijdig is, ze ook gelijkbenig is.

Noem de uitspraak 'een driehoek is gelijkzijdig' p en de uitspraak 'een driehoek is gelijkbenig' q. Zo verkrijgen we de algemene vorm van een implicatie met het gebruik van pijlen:

$$\text{Een driehoek is gelijkzijdig} \Rightarrow \text{Een driehoek is gelijkbenig.}$$

$$p \Rightarrow q$$

Als uitspraak p waar is, dan volgt automatisch dat q waar is door de implicatie. Omgekeerd is dat niet het geval: q kan waar zijn zonder dat p waar is. Een driehoek kan gelijkbenig zijn zonder gelijkzijdig te zijn. Uiteraard kunnen ook beide uitspraken onwaar zijn (neem bv. een willekeurige driehoek die niet gelijkbenig is), dan nog blijft de gevolgtrekking uit de implicatie valide. Het enige wat onmogelijk is en wat de implicatie ook onwaar maakt is het geval dat p waar zou zijn en q onwaar. Dan is de implicatie ongeldig of onwaar. Er zijn geen gelijkzijdige driehoeken die niet gelijkbenig zijn. Moesten die er toch zijn, dan klopt de implicatie niet. We bekomen de waarheidstabel in tabel 3.1.

p	**q**	**p ⇒ q**
Waar	Waar	Waar
Waar	Vals	Vals
Vals	Waar	Waar
Vals	Vals	Waar

Tabel 3.1: *Waarheidstabel implicatie* $\Rightarrow$

Een implicatie bewijzen

We gaven al aan dat p een voldoende voorwaarde is voor q. In bewijsvoeringen betekent dit dat om te bewijzen dat een implicatie geldt, p het **gegeven** is en q het **te bewijzen**. Uitspraken die enkel in één richting gelden en dus enkel een implicatie zijn en geen equivalentie, noemen we bijna altijd **eigenschappen**.

Voorbeeld
We bewijzen de getaleigenschap *Als we twee even getallen vermenigvulden, dan is het product even.* of met de pijlnotatie:

$$a, b \in \mathbb{N} \text{ zijn even getallen} \Rightarrow a \cdot b \text{ is even.}$$

Gegeven: $a, b \in \mathbb{N}$ zijn even getallen
Te bewijzen: $a \cdot b$ is even.
Bewijs: zie sectie 4.4.5.

Een implicatie ontkrachten

Om te beweren dat iets geen implicatie of eigenschap voorstelt, is het geven van **één tegenvoorbeeld** genoeg. Een bewijs moet in het algemeen immers voor alle gevallen gelden, als wij een geval kunnen vinden waarmee het niet werkt, dan kan een eigenschap ook niet bewezen worden en klopt er iets niet. Concreet weten we uit de waarheidstabel (Tabel 3.1) dat we een tegenvoorbeeld moeten zoeken waarbij p waar is, maar q onwaar.

Voorbeeld
We laten zien dat de omgekeerde eigenschap van daarnet niet geldt. Die zou luiden *Als een*

product van twee getallen even is, dan zijn beide getallen ook even. of met de pijlnotatie:

$$a \cdot b \text{ is even} \Rightarrow a, b \text{ zijn even getallen}$$

Neem bijvoorbeeld het product 6 dat kan geschreven worden als 2 maal 3 ($6 = 2 \cdot 3$). Het is meteen duidelijk dat 3 een oneven factor is. De omgekeerde eigenschap geldt dus niet. De hypothese p is immers voldaan, $2 \cdot 3$ is een even getal, maar het gevolg q is onwaar want 2, 3 zijn geen even getallen want 3 is oneven. Dit ene tegenvoorbeeld is genoeg om de omgekeerde implicatie te verwerpen.

3.1.2 Equivalentie

Een driehoek is gelijkbenig **als en slechts als** de driehoek twee gelijke hoeken heeft.

Deze uitspraak is een welbekend voorbeeld van een equivalentie. Het is een uitspraak die in twee richtingen geldt: **als** een driehoek gelijkbenig is, **dan** zijn de basishoeken gelijk. Maar ook omgekeerd **als** een driehoek twee gelijke hoeken heeft, **dan** is de driehoek gelijkbenig.

We zeggen ook wel dat het hebben van twee gelijke hoeken in een driehoek een **nodige en voldoende voorwaarde** is voor gelijkbenigheid. Een gelijkbenige driehoek heeft altijd twee gelijke hoeken en omgekeerd zal je geen driehoek vinden met twee gelijke hoeken die niet gelijkbenig is. Het hebben van twee gelijke hoeken in een driehoek valt dus samen met gelijkbenigheid, daarom noemen we eigenschappen die ook omgekeerd gelden ook **kenmerken** of (alternatieve) **definities**. Het is wiskundig volledig oké om als definitie van gelijkbenigheid te geven: *Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met twee gelijke hoeken.*

Noem de uitspraak 'een driehoek is gelijkbenig' p en de uitspraak 'de driehoek heeft twee gelijke hoeken' q. Zo verkrijgen we de algemene vorm van een implicatie met het gebruik van pijlen:

$$\text{Een driehoek is gelijkbenig} \Leftrightarrow \text{De driehoek heeft twee gelijke hoeken.}$$

$$p \Leftrightarrow q$$

Vermits p en q nodige en voldoende voorwaarden van elkaar zijn die altijd samen voorkomen, zijn ze ofwel samen allebei waar of samen allebei onwaar. Een gelijkbenige driehoek heeft altijd twee gelijke hoeken en omgekeerd zal je geen driehoek vinden met twee gelijke hoeken die niet gelijkbenig is. Een equivalentie wordt ongeldig of onwaar als er toch voorbeelden zouden kunnen gevonden worden waarbij p en q niet allebei gelijktijdig waar/onwaar zijn. We bekomen volgende waarheidstabel:

p	**q**	**p ⇔ q**
Waar	Waar	Waar
Waar	Vals	Vals
Vals	Waar	Vals
Vals	Vals	Waar

Tabel 3.2: *Waarheidstabel equivalentie ⇔*

Merk op dat we deze paragraaf begonnen zijn met de equivalentie, de 'als en slechts als'-relatie, te ontrafelen in twee 'als dan'-relaties of implicaties, dat is algemeen zo:

$$p \Leftrightarrow q$$
komt overeen met:
$$p \Rightarrow q \textbf{ en } q \Rightarrow p$$

Een equivalentie bewijzen

We hebben net uitgelegd dat een equivalentie uiteenvalt in twee implicaties. Het komt dus neer om de twee implicaties te bewijzen. Je bewijst de equivalentie dus in twee richtingen ($\Rightarrow$ en $\Leftarrow$). Het is niet ongewoon dat één van de twee richtingen veel makkelijker is om te bewijzen dan de omgekeerde richting. Toch zijn ze allebei noodzakelijk om een equivalentie aan te tonen.

Voorbeeld
We bewijzen het kenmerk 'Een driehoek is gelijkbenig **als en slechts als** de driehoek twee gelijke hoeken heeft.'

$\boxed{\Rightarrow}$

Gegeven: $\triangle ABC$ is gelijkbenig ($|AB| = |AC|$)
Te bewijzen: $\hat{B} = \hat{C}$
Bewijs: zie sectie 4.8.2.

$\boxed{\Leftarrow}$

Gegeven: $\triangle ABC$ met $\hat{B} = \hat{C}$
Te bewijzen: $|AB| = |AC|$
Bewijs: zie sectie 4.8.2.

Een equivalentie ontkrachten

Om te beweren dat iets geen equivalentie, kenmerk of definitie is, is het geven van **één tegenvoorbeeld** genoeg. Uit de waarheidstabel van een equivalentie zien we dat het voldoende is om een voorbeeld te construeren waarin p en q een verschillende waarheidswaarde hebben. Om bijvoorbeeld aan te tonen dat:

$$a, b \in \mathbb{N} \text{ zijn even getallen} \Leftrightarrow a \cdot b \text{ is even,}$$

onwaar is en dus geen equivalentie is, kan je hetzelfde tegenvoorbeeld gebruiken als bij de paragraaf rond implicatie ontkrachten. Je geeft immers een voorbeeld waar bij q wel waar is ($6 = 2 \cdot 3$ is even), maar p onwaar (3 is oneven).

3.2 Implicaties en equivalenties in de klas

Het is vooral belangrijk leerlingen te doen inzien dat niet alle redeneringen in twee richtingen gelden. Bij het zien van nieuwe eigenschappen, laat je ze dan ook best zelf het juiste symbool invullen. We stellen een ruw lesplan voor.

3.2.1 Stap 1: spel met concrete voorbeelden

Laat leerlingen in groepjes van twee werken. Ze moeten na elke uitstpraak die jij deed opschrijven of die 'Waar' of 'Onwaar' is en hun antwoord in de lucht steken. Als ze denken dat de uitspraak 'Onwaar' is, moeten ze er wel een reden bijgeven. Geef hierbij genoeg duiding: 'wat moeten jullie doen als jullie denken dat een uitspraak onwaar is?' Vertel hen dat een tegenvoorbeeld overtuigend genoeg moet zijn om iemand ander te overtuigen dat de uitspraak verkeerd is. Groepjes die het juist hadden, krijgen een puntje bij. Laat genoeg tijd om de duo's te laten discussiëren.

Lees één-voor-één uitspraken zoals onderstaande:

- Als je in Brussel woont, dan woon je in de grootste stad van België.
- Als je in de grootste stad van België woont, dan woon je in Brussel.
- Als je opgroeide in Antwerpen, dan ken je de Meir.
- Als je de Meir kent, dan groeide je op in Antwerpen.
- Als ik slaap, dan ben ik aan het ademen.
- Als ik aan het ademen ben, dan slaap ik.

Merk op 3.2.1

Opgelet! *Het vinden van éénduidige uitspraken uit het dagelijks leven is heel moeilijk. Zo voldoen veel concrete 'als dan'-uitspraken uit het dagelijks leven* ***niet*** *aan de logische regels van een wiskundige implicatie. Een standaard voorbeeld is 'Als je braaf bent, dan krijg je een snoepje', dat lijkt een implicatie maar dat is er wiskundig geen. We zouden immers als negatie van de uitspraak aanvaarden 'Als je niet braaf bent, krijg je geen snoepje.' Dat komt echter helemaal niet overeen meet de negatie van een wiskundige implicatie (bv. als een driehoek niet gelijkzijdig is, is ze ook niet gelijkbenig, dat klopt niet). Het probleem is eigenlijk dat we in taalgebonden uitspraken geen onderscheid maken tussen implicatie en equivalentie en dat veel van onze menselijke uitspraken niet eenduidig waar of vals zijn. Merk op dat bovenstaande voorbeelden dat probleem niet hebben.*

Overloop na elke uitspraak de waarheidwaarde en de mogelijke tegenvoorbeelden.

3.2.2 Stap 2: introduceer het begrippenkader

De uitspraken laten mooi toe om te laten zien dat sommige uitspraken ook omgekeerd gelden en dus een equivalentie zijn en andere uitspraken een strikte implicatie. Laat studenten nu in groepjes:

1. Een definitie zoeken voor een implicatie. Laat ze hiervan een concreet voorbeeld zoeken en een tegenvoorbeeld.
2. Een defintie zoeken voor een equivalentie. Laat ze hiervan een concreet voorbeeld zoeken en een tegenvoorbeeld.

3.2.3 Stap 3: Wiskundevoorbeelden

Geef een lijst met voorbeelden, leerlingen plaatsen zelf het juiste symbool $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \not\Rightarrow$. Met $\Rightarrow$ komt woordelijk 'daaruit volgt' overeen, met $\Leftrightarrow$ 'als en slechts als' en met $\not\Rightarrow$ 'daaruit volgt niet.' Bij het laatste symbool dienen ze ook een tegenvoorbeeld te geven. Deze opdracht kan je verschillende keren doen bij de verschillende inhoudelijke bouwstenen.

- Een getal is deelbaar door 3 ..... het getal is oneven.
- Een driehoek heeft een hoek van 90° ..... het is een rechthoekige driehoek.
- Twee driehoeken zijn congruent ..... de twee driehoeken hebben dezelfde oppervlakte.
- Een driehoek is gelijkzijdig ..... de driehoek is gelijkbenig.
- Een driehoek heeft twee gelijke basishoeken ..... de driehoek is gelijkbenig.
- In een vierhoek staan de diagonalen loodrecht op elkaar ..... de vierhoek is een parallellogram.
- In een vierhoek staan de diagonalen loodrecht op elkaar ..... de vierhoek is een ruit.
- Een vierhoek is een parallellogram ..... de overstaande zijden van de vierhoek zijn gelijk.
- $x^2 = 4$ ..... $x = 2$
- Een getal is even ..... het kwadraat van het getal is even.
- Een getal is een geheel getal ..... een getal is een natuurlijk getal.
- Een getal is een natuurlijk getal ..... het getal is een element van $\mathbb{Q}$.

Hoofdstuk 4

Bewijzen: redeneren & argumenteren

4.1 Inleiding

4.1.1 Waarom bewijzen?

Tijdens de navorming begonnen we met een filmpje [Schooltv.nl, 2007] waarin gesteld werd dat bewijsvoeringen in de wiskunde leiden tot 100% onomstotelijke waarheden. Wanneer iets eenmaal bewezen is, wordt een wiskundige eigenschap een stelling die ook nooit meer onwaar zal worden. En daarmee onderscheidt de wiskunde zich bijvoorbeeld van de natuurkunde of de biologie of scheikunde, waar door nieuwe inzichten wél oude vertrouwde theorieën op de schop kunnen. We kunnen dus algemene waarheden, los voor concrete gevallen poneren door bewijzen. Het filmpje antwoordt zelf op de vraag wat we daar aan hebben in het dagelijks leven: 'Nou ja, in het dagelijks leven heb je, vind ik, heel veel aan het zorgvuldig beredeneren en het is heel verstandig om dingen goed op een rijtje te zetten en heel rustig en zorgvuldig nieuwe waarheden te genereren uit oude waarheden. Maar: we kunnen ons best doen zo goed mogelijk te redeneren, maar zo netjes als in de wiskunde zal het in de echte wereld toch niet makkelijk gaan.'

Met bewijzen kan je jezelf en elkaar overtuigen door te redeneren. Je kunt een stuk wiskunde helemaal begrijpen. Je dringt door tot het 'waarom' en dat geeft een machtig gevoel. Wij kunnen redeneringen en bewijzen van duizenden jaren geleden nog steeds begrijpen en ze zijn nog altijd geldig. Qua curriculum is de abstractielaag die nu gelegd wordt in de eindtermen ook een duidelijke breuk met de lagere school: we stappen over naar het zeer utilitaristisch rekenwerk naar een abstracter, wiskundig leerstofkader. De kritiek die uit meerdere hoeken kwam dat de eerste graad tot voor kort teveel 'herhaling' was van de lagere school, wordt daarmee in de kiem gesmoord, door nu duidelijk te kiezen voor meer abstractie in de eerste graad.

Uiteraard beheerst niemand de hele wiskunde en afhankelijk van het talent en de inspanning zal de ene leerling meer wiskunde begrijpen dan de andere... Niet alle leerlingen hebben een boodschap aan formele bewijzen maar we vinden dat alle leerlingen, op hun niveau, het recht hebben om te 'begrijpen waarom'. Dit kan ook met een visuele verklaring of door te redeneren op een 'generiek voorbeeld' (een voorbeeld dat niet 'speciaal' is en waarmee je laat zien dat de redenering analoog ook voor andere voorbeelden moet gelden). In dit hoofdstuk zullen we tal van voorbeelden zien waarin je rijkelijk kunt plukken voor jouw leerlingendoelgroep. Het

is zeker niet de bedoeling alle bewijzen aan te raken, maar die redeneringen aan te raken die voor jouw leerlingen interessant zijn.

We zouden graag hebben dat leerlingen het woord 'bewijs' niet associëren met een van buiten te leren tekstje (zinnen, formules...) tegen de toets, maar met een kans om te redeneren, om te begrijpen waarom, om elkaar te overtuigen en om op die manier te groeien in inzicht. Zeker in de eerste graad willen we meer de nadruk leggen op de nieuwsgierigheid naar het waarom en op het leren verwoorden van (eigen) redeneringen, dan op formele aspecten en de samenhang van een grote theorie. Om dit te realiseren, is het nodig om niet alleen bewijzen als theorie aan te bieden, maar ook genoeg haalbare bewijs*oefeningen* te voorzien. Het memoriseren van een bewijs is niet per se zinloos, maar vooral het (samen) zoeken naar verklaringen en bewijzen is belangrijk. Elk bewijs wordt dan een stuk 'problem solving'. We zouden zeker niet wachten met bewijzen tot de meetkunde in het tweede jaar (met congruente driehoeken enz.). Ook in de getallenleer en de algebra van het rekenen met letters kunnen de leerlingen leren bewijzen: goocheltrucjes verklaren, formules bij patronen verantwoorden...

4.1.2 Overzicht hoofdstuk

De eerste paragraaf maken we het verschil duidelijk tussen een redenering versus een bewijs. Daarna duiken we in de bewijzen en gaat het in eerste instantie over rekenen met letters. We zien dit immers als een manier om te *bewijzen* dat een bepaalde wetmatigheid geldt voor alle mogelijke getalwaarden van deze letters. We kiezen hier vooral voor de context van goocheltrucs, deelbaarheid, even en oneven en het rekenen met patronen.

Daarna bewijzen we allerlei zaken over hoeken: gelijke en supplementaire hoeken bij evenwijdigheid, de som van de hoeken in een driehoek. . .

Het gaat vervolgens over bewijzen met congruentiekenmerken van driehoeken en met eigenschappen en kenmerken van speciale vierhoeken.

We eindigen met een korte paragraaf over visuele bewijzen met oppervlakte. Ook de merkwaardige producten hebben hier hun plaats gevonden. Dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op de 'Onder de loep: Redeneren en bewijzen in de eerste graad' van Michel Roelens uit Uitwiskeling 35-2 Lente 2019 [Roelens, 2019].

4.2 Wat zijn redeneringen?

Voorbeeld Op een tafel staan 3 gesloten dozen. Eentje zit vol met TWIX, ééntje vol met Milky Way en een ander is gemixed (half-half). De boxes zijn gelabeld: TWIX, Milky Way en Mix, maar elk label is verkeerd. Je mag één box open doen om daarna alle labels correct te plaatsen hoe ga je te werk?

Uitgewerkte redenering

1. Open de doos met als label 'Mix.'

2. Vermits alle labels fout waren, zullen daar enkel Twixen of Milky Ways inzitten. Dat label kan dus meteen juist geplaatst worden.

3. De twee overblijvende labels mag je nu wisselen van plaats: alle labels waren fout en er rest voor elk van hen nog maar één plaats over.

4.2.1 Redeneringen in de klas

Bovenstaand voorbeeld is een perfect voorbeeld van een redenering. De eindterm legt eigenlijk geen strikte bewijsvoeringen op, wetende dat in de zeer diverse A-stroom in de eerste graad dit voor de zwakste leerlingen allicht geen haalbare kaart is. Daarmee houden we de deur open voor het verklaren van een strategie horende bij een probleem als minimumlat voor het bereiken van de eindterm. Het is ook mogelijk om sommige bewijzen iets minder rigoureus te behandelen en dit te zien als een redenering. Uiteraard roepen we op om vooral bewijzen te zien, onderstaand is daarvoor massa's inspiratie te vinden. Als het echter niet anders kan, kan u zich tot bovenstaande voorbeelden beperken.

4.3 Rekenen met lettervormen: Goocheltrucs

Er zijn nogal wat goocheltrucjes waarbij iemand uit het publiek een getal in gedachten moet nemen en hiermee een aantal berekeningen moet maken. De goochelaar kan uiteindelijk zeggen wat dit getal is of wat het eindresultaat is van deze berekeningen. Zo'n goocheltruc kan verklaard (bewezen) worden door te rekenen met letters. Letters staan voor willekeurige getallen; door hiermee te rekenen kun je in feite alle mogelijke berekeningen die de persoon uit het publiek zou kunnen gemaakt hebben, in één keer uitvoeren. Oneindig veel berekeningen tegelijk: als dat niet toveren is... We denken dat dit idee een goede manier is om het rekenen met letters in de eerste graad aan te vatten. Het motiveert de leerlingen voor de rekenregels die dit mogelijk maken en bovendien sluit het goed aan bij wat de betekenis van een variabel getal is.

4.3.1 Bewijs 1: Het getal is 7

Gerelateerde eindtermen
Dit bewijs hoort fantastisch goed bij het rekenen in $\mathbb{Q}$, rekenen met lettervormen en de volgorde van de bewerkingen, inclusief het goed gebruik van haakjes. Wanneer de leerlingen gevraagd wordt om van een concreet geval zelf over te stappen naar de abstracte afhandeling, werk je ook aan het mathematiseren.

Voorbereiding
Schrijf ergens het getal 7 op een onverwachte plaats op: opgeschreven op een kaartje in een toverhoed, verstopt in de boekentas van een leerling,... Dit maakt het extra spannend.

Uitvoering
Je vertelt tegen je leerlingen:

1. Kies een nummer,
2. Tel er 8 bij op,
3. Vermenigvuldig het resultaat met 3,
4. Trek er 4 vanaf,
5. Tel je gekozen nummer erbij,
6. Deel door 4,
7. Tel er 2 bij op,
8. Trek er het initiële getal vanaf.

Als alle leerlingen nu goed geteld hebben, komen ze op 7 uit.

Bewijs
Het is raadzaam om de leerlingen te vragen om even hun berekening op te schrijven. Doe dit zonodig tweemaal. Laat ze nadien de uitdrukking zelf abstraheren waarbij ze gewoon in hun berekeningen hun gekozen getal door x moeten vervangen. Het is geen slecht idee dat in een eerste fase ook in de 8 stapjes te doen, en pas nadien de link leggen met de volgorde van de bewerkingen en het goed gebruik van haakjes. Op die manier kun je van concreet naar abstract gaan.

Concreet voorbeeld
17 = gekozen getal

1. 17
2. 17 + 8 = 25
3. 25 . 3 = 75
4. 75 - 4 = 71
5. 71 + 17 = 88
6. 88/4 = 22
7. 22 + 2 = 24
8. 24 - 17 = **7**

Abstracte afleiding
x = het gekozen getal

1. x
2. $x + 8$
3. $(x + 8) \cdot 3 = 3x + 24$
4. $3x + 24 - 4 = 3x + 20$
5. $3x + 20 + x = 4x + 20$
6. $(4x + 20)/4 = x + 5$
7. $x + 5 + 2 = x + 7$
8. $x + 7 - x = \mathbf{7}$

Het is erg raadzaam om eerst de abstracte uitwerking te doorlopen. Allicht kunnen veel leerlingen dat alleen door ze gewoon te vragen om in hun concreet voorbeeld het gekozen getal te vervangen door x. Dit sluit ook veel natuurlijker aan bij hoe ze de goocheltruc zelf beleefd hebben door te werken met een getal. Sla deze stap dus echt niet over. Hoewel deze abstracte afleiding in se volstaat als bewijs van de truc, raden we toch aan nog een trapje hoger te gaan, met onderstaand bewijs leg je de link naar betekenisvol rekenen met letters, de volgorde van de bewerkingen met het correct gebruik van de haakjes:

$$\begin{aligned}
&\frac{((x+8)\cdot 3-4)+x}{4}+2-x\\
&=\frac{3x+24-4+x}{4}+2-x\\
&=\frac{4x+20}{4}+2-x\\
&=x+5+2-x\\
&=7
\end{aligned}$$

Varianten
Dit is meteen een best stevig voorbeeld. Het is niet zo moeilijk eenvoudiger varianten te

bedenken, als je maar ergens ervoor kan zeggen dat de x terug van het toneel verdwijnt. Vermijd wel het gebruik van een te eenvoudig voorbeeld (bv. neem een getal, tel er twee bij op en trek er terug je getal van af), want dan is de magie natuurlijk weg. Je zou een zo'n variant ook kunnen vragen als bewijs op een evaluatie indien je dit bewijsje deed in de les.

4.3.2 Bewijs 2: Ik lees je gedachten

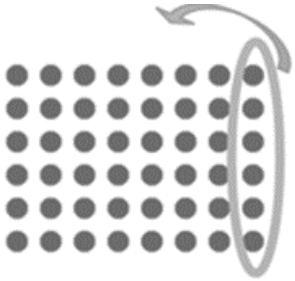
Gerelateerde eindtermen
Deze bewijsjes horen goed bij de eindtermen rond het eenvoudig rekenen met lettervormen, het voorstellen van patronen a.d.h.v. een formule en de merkwaardige producten.

Uitvoering
Laat een leerling een willekeurig natuurlijk getal groter dan 2 in gedachten nemen (voorbeeld: 5). Laat hem zowel de voorganger van het getal als het volgende getal erbij optellen (voorbeeld: $5 + 4 + 6 = 15$). Vraag hem de uitkomst (voorbeeld: 15). Doe alsof je zijn gedachten leest en onthul zijn gekozen getal. Dat is erg eenvoudig: de uitkomst die de leerling verkrijgt, is het drievoud van het gekozen getal. Je moet dus enkel delen door drie om zo de 'gedachten te lezen' (voorbeeld: $15/3 = 5$).

Meestal zullen de leerlingen vragen de truc te herhalen. Om de truc niet meteen te moeten verklaren, kun je terugvallen op een variant van deze truc. Laat één of alle leerlingen opnieuw een natuurlijk getal kiezen groter dan 2 (voorbeeld: 5), maar ditmaal moeten ze de voorganger van het getal vermenigvuldigen met de opvolger van het getal (voorbeeld: $4 \cdot 6 = 24$). Laat enkele leerlingen hun uitkomst meedelen. Je kunt weer het oorspronkelijke getal raden: tel bij het antwoord van de leerling 1 op en neem dan de vierkantswortel (voorbeeld: $\sqrt{24+1} = 5$). Dit zal het oorspronkelijke gekozen getal zijn.

Bewijs
De wiskunde achter deze truc is vrij eenvoudig te achterhalen. De leerling telt in feite driemaal hetzelfde getal op. De voorganger van het gekozen getal en de opvolger van dat gekozen getal vormen samen het tweevoud van het gekozen getal. Je vindt hiernaast een visualisatie. Je kunt er ook voor kiezen om dit probleempje door letters voor te stellen:

$$(x-1) + x + (x+1) = 3x$$



De productvariant van deze truc is ook eenvoudig te verklaren. Stel dat de leerling het getal zeven kiest, hij zal dan $6 \cdot 8 = 48$ krijgen. Door de bewerking krijg je steeds één minder dan het kwadraat van het gekozen getal. Hiernaast vind je weer een visualisatie. Het product van de voorganger en de opvolger kun je voorstellen als een rechthoek van stippen waarvan de lengte 2 meer is dan de breedte. Mits toevoeging van een eenheid kun je de rechthoek tot een vierkant 'herschikken'. Hoewel deze visuele interpretatie uitleggen aan leerlingen uiterst cruciaal is en best niet overgeslagen wordt (grijp niet te snel naar de algebraïsche vertaling van het probleem), is die uiteraard ook doenbaar:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{[(x-1)(x+1)]+1} \\
&= \sqrt{[x^2-1]+1} \\
&= \sqrt{x^2} \\
&= x
\end{aligned}$$

Gedifferentieerde aanpak
Je kunt een les voor de eerste graad opbouwen met tips op verschillende niveaus. De leerlingen kunnen ervoor kiezen om het probleem zonder tips op te lossen of met een hulpfiche. Hierbij kunnen ze kiezen uit de volgende drie fiches.

- **Fiche 1**
  Stel het getal voor door x.

- **Fiche 2**
  Stel het getal voor door x. Stel vervolgens de voorganger en de opvolger voor. Maak voor truc 1 de som van de getallen, wat vind je? Maak voor truc 2 het product van de voorganger en de opvolger, wat vind je?

- **Fiche 3**
  Vul de volgende tabel aan. Onderaan in de tabel probeer je te veralgemenen wat je vond.

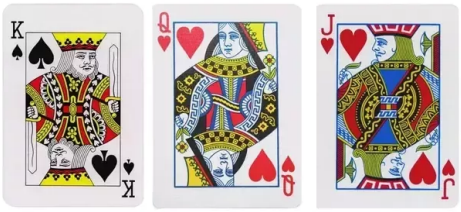
kies getal	**voorganger**	**opvolger**	**som van de 3 getallen**	**product voorganger & opvolger**	**Verband**
5	4	6	15	24	
x					

4.3.3 Bewijs 3: Kaart raden

Gerelateerde eindtermen
Deze bewijsjes horen goed bij de eindtermen rond het eenvoudig rekenen met lettervormen, het voorstellen van patronen a.d.h.v. een formule en de merkwaardige producten.

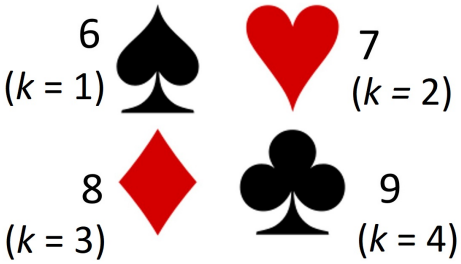
Benodigdheden
Een kaartspel, zonder jokers of andere overtollige kaarten.

Uitvoering
Laat uit een pak speelkaarten een kaart kiezen of trekken zonder dat jij de kaart ziet. Spreek af wat de getalwaarde is van de 'beeldkaarten': boer = 11; dame = 12; heer = 13.



13 12 11

Geef als instructie, stap voor stap terwijl de deelnemer rekent: 'Tel het getal van je kaart op met het volgende getal in de rij van de natuurlijke getallen. Vermenigvuldig het resultaat met 5. Tel er de kleur bij volgens het schema hieronder. Zeg je einduitkomst.'



Hiermee kun je als goochelaar zeggen welke kaart het was. Als het cijfer van de eenheden een 1 is, weet je dat het schoppen is, een 2 is harten, een 3 is ruiten en een 4 is klaver. Om de getalwaarde van de kaart te kennen, trek je 1 af van het aantal tientallen. Stel je krijgt als antwoord 34, dan slaan de eenheden op de kleur ($k = 4$, dus klaveren) en alles vanaf de tientallen slaat op de getalwaarde van de kaart min 1 (dus $3 - 1 = 2$, kaart twee), 34 slaat dus op klaveren twee. Krijg je 122 als antwoord dan krijg een harten ($k = 2$) boer ($12-1 = 11$).

Bewijs
Noem de getalwaarde van de kaart n en het getal van de kleur $5 + k$ (dus: k is 1 als het een schoppen kaart is, 2 als het harten is enz...).

Het getal optellen met het volgende getal geeft:

$$\begin{aligned} n + (n + 1) &= n + n + 1 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Dit maal 5 geeft:

$$(2n + 1) \cdot 5 = 10n + 5$$

Hierbij wordt de kleur bijgeteld:

$$\begin{aligned} 10n + 5 + (5 + k) &= 10n + 5 + 5 + k \\ &= 10n + 10 + k \\ &= 10(n + 1) + k \end{aligned}$$

Dit bewijst dat eenheden k de kleurcode aangeeft, en alles vanaf de tientallen de getalwaarde $n - 1$.

4.3.4 Bewijs 4: Obscuur optellen

Gerelateerde eindtermen
Deze bewijsjes horen goed bij de eindtermen rond het eenvoudig rekenen met lettervormen en de betekenis van het tiendelig talsel: als we achter een getal een 2 zetten, moeten we alle reeds aanwezige cijfers maal 10 doen..

Benodigdheden
Een kaartspel, zonder jokers of andere overtollige kaarten.

Uitvoering
De goochelaar vraagt aan iemand van het publiek om twee opeenvolgende getallen onder elkaar te schrijven. Daaronder: de som van die twee getallen. Daaronder: de som van de laatste twee getallen. Dit moet hij herhalen tot er juist zes getallen onder elkaar staan. De goochelaar kan vliegensvlug de som van deze zes getallen opschrijven.

Uitgewerkt voorbeeld

87
88
175
263
438
701

De som is 1752. Dit is het derde getal waar een 2 achter gezet is.

Bewijs
Noem het eerste getal x. Bepaal voor dit variabel getal de zes getallen en hun som.De getallen zin:

$$x$$

$$x + 1$$

$$x + x + 1 = 2x + 1$$

$$x + 1 + 2x + 1 = 3x + 2$$

$$2x + 1 + 3x + 2 = 5x + 3$$

$$3x + 2 + 5x + 3 = 8x + 5.$$

Hun som is:

$$x + x + 1 + 2x + 1 + 3x + 2 + 5x + 3 + 8x + 5 = 20x + 12.$$

Dit is inderdaad het derde getal is waar een 2 achter gezet is, er geldt:

$$20x + 12 = 20x + 10 + 2 = 10(2x + 1) + 2.$$

Om de laatste stap bevattelijk te maken, kan het handig zijn om dit voor te tonen op een aantal concrete voorbeelden.

4.3.5 Bewijs 5: Het wondergetal

De volgende goocheltruc is een klassieker die je in veel boeken terugvindt. Het verklaren ervan is waarschijnlijk te moeilijk voor de modale leerling. Maar soms heb je ook een paar niet-modale leerlingen...

Gerelateerde eindtermen
Deze bewijsjes horen goed bij de eindtermen rond het werken met een variabele als willekeurig getal en het toepassen op formules van rekenregels die gelden voor getallen. Daarnaast is het bewijs van de truc een mooie illustratie van de de betekenis van de cijfers in een getal (in het tiendelig talstelsel): het getal 346 is $3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6$. In het wondergetal wordt op die manier een 'willekeurig' natuurlijk getal van drie cijfers geschreven als $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ (waarbij a,b en c de cijfers zijn of nog: elementen van $\mathbb{N}$)). Ook deelbaarheid komt aan bod (de 99-vouden).

Benodigdheden
Een notitieblok dat je kan doorgeven. Je veroorzaakt een extra krachtig effect als je ergens in het klaslokaal een blad met de cijfers 1089 verstopt.

Uitvoering
Laat iemand uit het publiek een willekeurig getal van drie verschillende cijfers bedenken en opschrijven (bv. 782), zodat jij het niet kunt zien. Iemand anders moet dit getal omdraaien (bv. 287) en weer iemand anders moet het kleinste van het grootste getal aftrekken. (bv. 782 - 287 = 495) Laat dit laatste getal weer omdraaien (594) en deze laatste twee getallen met elkaar optellen (bv. 495 + 594 = 1089). Jij hebt nog altijd niets gezien. Doe alsof je gedachten leest en onthul het eindresultaat: 1089. Als je vooraf doet dat je gedachten kan lezen, kan je erg dramatisch dit ergens opschrijven en dan onthullen, leerlingen zullen erg verrast zijn. Een andere mogelijkheid is bv. een briefje in een leerling zijn boekentas te steken met dit getal op. Het verrassingseffect zal enorm zijn.

Voorbeld uitgewerkt:

$$\begin{array}{r} 782 \\ -287 \\ 495 \\ \underline{+594} \\ 1089 \end{array}$$

Bewijs
Het gekozen getal kun je schrijven als $100a + 10b + c$ (met $a, b, c \in \mathbb{N}$). Bijvoorbeeld als het getal 349 is, dan is $a = 3, b = 4$ en $c = 9$.

We passen eerst de berekeningen (het omdraaien en het aftrekken) toe op het 'algemene' getal $100a + 10b + c$. Dus:

Het getal is:

$$100a + 10b + c$$

Omgedraaid:

$$100c + 10b + a$$

Verschil:

$$\begin{aligned}&100a + 10b + c - (100c + 10b + a)\\&= 100(a - c) + (c - a) = 100(a - c) - (a - c) =\\&= 99(a - c)\end{aligned}$$

Dit zijn alle 99-vouden van twee of drie cijfers: $99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990$. De cijfers van een 99-voud hebben de speciale eigenschap dat het cijfer van de tientallen altijd 9 is. De som van de cijfers van de eenheden en de honderdtallen is ook 9. (Je kan dit eenvoudig nagaan op de 99-vouden < 1000 die hier zijn opgesomd). We kunnen op deze eigenschap steunen om te bewijzen dat de som van een 99-voud en zijn 'omgedraaide' altijd 1089 is. Omdat er maar tien gevallen zijn, zou een mogelijk bewijs kunnen zijn: alle gevallen narekenen. Dit is niet slecht, want zo kwamen we ook tot de eigenschappen van de 99-vouden < 1000. Met een sterekere groep kan je het ook nog wiskundiger aanpakken:

Steunend op de vastgestelde eigenschap is het 99-voud van de vorm

$$100d + 10 \cdot 9 + e \quad \text{met } d + e = 9.$$

Het omgedraaide getal is

$$100e + 10 \cdot 9 + d.$$

Optellen geeft:

$$\begin{aligned}&100d + 10 \cdot 9 + e + 100e + 10 \cdot 9 + d\\&= 100(d + e) + 10 \cdot 18 + e + d\\&= 100 \cdot 9 + 10 \cdot 18 + 9\\&= 900 + 180 + 9\\&= 1089\end{aligned}$$

Samenvatting van het bewijs: Het verschil van het gekozen getal en zijn omgedraaide is een 99-voud en we hebben bewezen dat de som van dit verschil en zijn 'omgedraaide' altijd gelijk is aan 1089.

4.4 Deelbaarheid, even & oneveven

Deelbaarheid, even, oneven, deelbaarheidskenmerken: deze begrippen vormen een prima context voor kleine bewijsjes, door te rekenen met letters maar soms ook door te werken met een generiek voorbeeld. Strikt genomen is het geen bewijs als je op een concreet voorbeeld werkt, maar je kunt het idee van een bewijs er wel mee tonen. Dat bewijs-idee kun je vaak ook visueel maken, door de getallen voor te stellen als patronen. Het is belangrijk dat je met de leerlingen vragen over bewijzen bespreekt: wat is een bewijs, waarom volstaat het uitrekenen op voorbeelden niet, waarom ben je zeker dat je bewijs-idee altijd werkt...?

4.4.1 Bewijs 1: De som van drie opeenvolgende getallen is een drievoud

Dat de som van drie opeenvolgende getallen altijd een drievoud is, kun je met letters bewijzen: noem de getallen n, $n+1$ en $n+2$. De som is

$$\begin{aligned} & n+n+1+n+2 \\ & = 3n+3 \\ & = 3(n+1). \end{aligned}$$

Dit bewijsidee kun je met een voorbeeld tonen. Neem bv. $13+14+15$. Als je de som gewoon uitrekent en vaststelt dat het een drievoud is, dan 'bewijs' je nog niets. Maar door te schrijven $13+13+1+13+2 = 3 \cdot 13+3 = 3 \cdot (13+1) = 3 \cdot 14$ overtuig je wel dat je dit voor elk getal kunt doen, niet alleen voor 13. Je kunt het ook visualiseren: onder elkaar rijtjes van 13, 14 en 15 punten 'herschikken' tot een rechthoek van 3 rijen van 14 (door het verste puntje van die 15 te verplaatsen achter de rij van 13):

o o o o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o o o o o o

Dezelfde redenering werkt ook gebruikt in de goocheltruc 'Ik lees je gedachten' (zie 4.3.2) die hier heel mooi bij aansluit.

4.4.2 Bewijs 2: Deelbaarheidskenmerk van 9

Om het kenmerk van deelbaarheid door 9 te bewijzen, kun je werken met een generiek voorbeeld:

een (natuurlijk) getal is deelbaar door 9
$\Leftrightarrow$ de som van de cijfers is deelbaar door 9

Neem bv. het getal 576. Er geldt:

$$\begin{aligned} 576 &= 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \\ &= 5 \cdot (99+1) + 7 \cdot (9+1) + 6 \\ &= 5 \cdot 99 + 5 + 7 \cdot 9 + 7 + 6 \\ &= 5 \cdot 99 + 7 \cdot 9 + 5 + 7 + 6 \\ &= \text{een negenvoud} + (5+7+6) \end{aligned}$$

Zo'n voorbeeld is wat de redenering betreft 'algemeen'; werken met een willekeurig getal van drie cijfers zou hetzelfde zijn behalve dat 5, 6 en 7 vervangen zouden zijn door letters a, b en c. Om heel algemeen te zijn, zou ook het aantal cijfers willekeurig moeten zijn en zou men moeten werken met $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_0$, maar dit zou voor het begrijpen van het 'waarom' hier eigenlijk geen meerwaarde hebben.

Voor getallen kleiner dan 100 kunnen we het ook visueel voorstellen. Om in het getallenrooster hieronder van het ene negenvoud naar het volgende te springen, tel je één tiental bij (ga je

één stap naar beneden) en trek je één eenheid af (ga je één stap naar links). Op die manier blijft de som van het aantal cijfers ongewijzigd. Omdat bij 9 de som van de cijfers uiteraard een negenvoud is, is dit ook zo voor de andere negenvouden.

1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10
11	12	13	14	15	16	17	**18**	19	20
21	22	23	24	25	26	**27**	28	29	30
31	32	33	34	35	**36**	37	38	39	40
41	42	43	44	**45**	46	47	48	49	50
...									

Een suggestie van Numberphile (Padilla, s.d.) is om ook kenmerken van deelbaarheid voor te stellen als goocheltoeren. Je geeft bv. aan een deelnemer een pakje van 9 kaarten genummerd 1(=aas), 2, 3, ...9. De deelnemer moet die allemaal op tafel leggen in een zelfgekozen volgorde en zo een getal van 9 cijfers maken. Je beweert: "Ik voel dat je een negenvoud hebt gemaakt." De klas controleert met een rekenmachine. Dan mag de deelnemer de volgorde veranderen en een kaart wegnemen (of toevoegen uit de kaarten van een andere kleur). Jij neemt ook een kaart weg (of voegt ook een kaart toe). Opnieuw een negenvoud. Hoe werkt dit? De som van de cijfers, "1+2+3+4+5+6+7+8+9=45", is een negenvoud. Daarom is het getal, wat de volgorde ook weze, een negenvoud. De som van de cijfers verandert niet als je de volgorde verandert. Als de deelnemer bv. de 6 heeft weggenomen, neem jij de 3 weg. Of als de deelnemer bv. een 2 toevoegt, voeg jij een 7 toe. Je zorgt ervoor dat de som van de cijfers een negenvoud blijft.

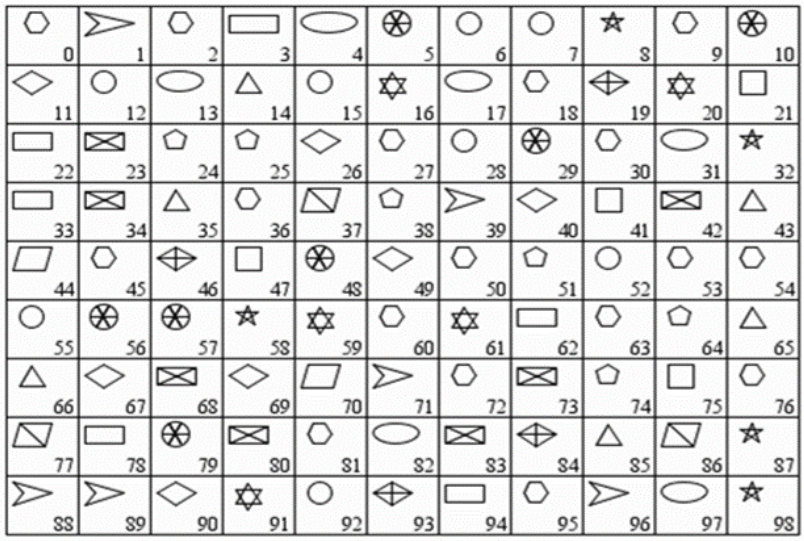
In feite kun je heel veel eigenschappen van getallen presenteren als goocheltrucs en ze hiermee (nog) aantrekkelijker maken voor de leerlingen.

4.4.3 Bewijs 3: Goocheltruc - Symbool voorspellen

Gerelateerde eindtermen
Volgend bewijs sluit mooi aan bij het vorige deel rond negenvouden, maar ditmaal vertaald in een prachtige goocheltruc. De verklaring van deze truc laat de kracht zien van het rekenen met letters, een belangrijk onderwerp in de eerste graad. Door de cijfers voor te stellen door letters a en b, voer je de berekening in feite uit voor alle getallen van twee cijfers tegelijk. Het is ook belangrijk dat de leerlingen leren om het getal te schrijven als $10a + b$ en niet als ab (want dit stelt het product van de cijfers voor).

Voorbereiding
Voor je aan deze truc kunt beginnen, heb je het schema in Figuur 4.1 nodig.

Uitvoering
Laat je leerling een getal kiezen dat uit twee cijfers bestaat. Laat hem de som van de cijfers nemen en van het gekozen getal aftrekken. Bijvoorbeeld: de leerling kiest 73. Dan berekent hij: $73-(7+3)$. Toon het schema en laat hem het symbool memoriseren dat bij zijn uitkomst hoort. Je kunt nu de 'show' starten. Zeg de leerling goed te denken aan het symbool. Doe alsof je je concentreert om zijn gedachten te lezen. Neem een stukje krijt of een pen en teken het symbool.



Figuur 4.1: *Het schema voor de truc*

De berekening levert altijd een negenvoud op. De leerling is zo gefocust op zijn getal en het bijbehorende symbool, dat hij in eerste instantie de tabel niet grondig zal bestuderen. Doet hij dit wel, dan zal het al snel opvallen dat bij de negenvouden – behalve bij 90 telkens hetzelfde symbool getekend staat. Je moet dus, voor het uitvoeren, enkel kijken welk symbool er bij de negenvouden staat.

Als je de truc meer dan één keer uitvoert, zorg je best voor verschillende versies van het schema om te vermijden dat hetzelfde symbool telkens weer uit de bus komt. Je kunt de schema's afdrukken van de website *cut-the-knot.org*. In een klas met internet kun je ook de versie van deze website gebruiken; het schema verandert dan automatisch.

Bewijs
De leerling kiest een willekeurig getal met twee cijfers; dit kunnen we voorstellen door $10a+b$. Hiervan moet hij $a+b$ aftrekken (de som van de cijfers) en dat levert het volgende op: $10a+b-(a+b) = 9a$, een negenvoud. Bij alle negenvouden vind je in het bovenstaande schema een zeshoek. Bij 90 is dit niet nodig omdat de leerling nooit 90 als uitkomst zal krijgen.

Even & oneven Voor de iets sterkere leerlingen, zijn er ook tal van bewijsjes te bedenken rond de eigenschappen even en oneven [Math4All, n.d.]. Al deze bewijzen steunen op het feiten dat alle oneven en even getallen kunnen geschreven worden in een welbepaalde vorm: een even getal a ($a \in \mathbb{N}$) kan altijd geschreven worden als een veelvoud van 2:

$$a = 2 \cdot k \quad \text{met } k \in \mathbb{N},$$

elk oneven getal b ($b \in \mathbb{N}$) kan daarentegen geschreven worden als een opvolger van een even getal:

$$b = 2 \cdot k + 1 \text{ met } k \in \mathbb{N}.$$

Het leuke is dat je er eindeloos op kan variëren, waardoor je ook sommige bewijsjes zelf kunt laten construeren op een toets of examen. Kenmerkend aan deze bewijsjes is wel dat ze vaak een naam geven (een variabele toekennen) aan uitdrukkingen waar reeds een variabele in gebruikt wordt, al proberen we dat bewust in onderstaande voorbeelden volledig te vermijden. Voor veel leerlingen zou dit anders allicht nog te ver gaan voor een eerste kennismaking met het gebruik van letters als variabelen. Daarnaast wordt er, erg voorzichtig, soms gesteund op het *ontbinden in factoren*, een algebraïsche teltechniek die volgens de eindtermen niet meer hoort tot het verplicht curriculum van de eerste graad. Toch kan het voorop plaatsen van gemeenschappelijke factoren eenvoudig uitgelegd worden aan de hand van distributiviteitsregel, zonder noodzaak om hierop afzonderlijk te oefenen. Daarnaast wordt in sommige bewijsjes het (verplichte) begrip 'kwadraat' aangehaald.

4.4.4 Bewijs 4: Som van twee oneven getallen is even

Stelling
De som van twee oneven getallen is altijd even.

Bewijs
Neem twee oneven getallen $a = 2n + 1$ en $b = 2m + 1$, optellen geeft:

$$a + b = 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$$

Dus $a + b$ is altijd deelbaar door 2 en daarom even.

Varianten
Het verschil van twee oneven getallen is even.
De som/het verschil van twee even getallen is even.
De som/het verschil van een even getal met een oneven getal is oneven.

4.4.5 Bewijs 5: Product van twee oneven getallen is oneven

Stelling
Het product van twee oneven getallen is altijd oneven.
Bewijs
Neem twee oneven getallen $a = 2n + 1$ en $b = 2m + 1$, vermenigvuldigen geeft:

$$a \cdot b = (2n + 1) \cdot (2m + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$$

Dus $a \cdot b$ is altijd oneven.

Varianten
Het product van twee even getallen is even.
Het product van een even getal met een oneven getal is even.

4.4.6 Bewijs 6: Het kwadraat van twee even getallen is even

Stelling
Het kwadraat van twee getallen is even.

Bewijs
Neem een ven getallen $a = 2n$, kwadrateren geeft:

$$a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2)$$

Dus is het kwadraat van een even getal inderdaad deelbaar door 2.

Varianten
Het kwadraat van twee oneven getallen is oneven.

4.4.7 Bewijs 7: Goocheltruc - De ringdrager

Gerelateerde eindtermen
Volgend bewijsje is een mooie toepassing op de hierboven eigenschappen van het optellen van even/oneven getallen.

Voorbereiding
Voor deze truc heb je een ring en vijf leerlingen nodig.

Uitvoering
Kies vijf leerlingen uit de klas. Laat ze op een rij gaan staan. Geef elke leerling in je gedachten een nummer van 1 t.e.m. 5. Je geeft een klein voorwerp, bv. een ring, aan een leerling op een oneven positie, zonder hierop al te veel aandacht te vestigen. Je draait je nu om en zegt: "Telkens ik in mijn handen klap, moet je de ring doorgeven aan één van je buren." Als iedereen de regel begrijpt, kan het spel beginnen. Je klapt nu een oneven aantal keren in je handen. Dit zorgt ervoor dat de ring automatisch in de handen van een 'even' leerling komt, leerling 2 of 4. Draai je om en vertel dat je aanvoelt dat de twee buitenste leerlingen de ring niet hebben. Ze mogen weer gaan zitten zodat enkel leerlingen 2, 3 en 4 in het spel blijven. Je draait je weer om en herhaalt de vorige stappen (je klapt een oneven aantal keer in je handen), dit zorgt ervoor dat de ring in de handen komt van leerling nummer 3. Draai je om en laat één van de twee leerlingen op de even plaatsen gaan zitten. Draai je nog een laatste keer om en klap nu een even aantal keer in je handen. Hierdoor komt de ring in de handen van leerling nummer 3. Draai je om en onthul de plaats van de ring.

Bewijs
Je geeft de ring aan een oneven positie en telt er een oneven aantal ringwissels bij. Uit Bewijs 4 weten we dat de optelling van twee oneven getallen, een even getal oplevert, dus leerling 2 of 4 in dit geval. Je laat nu de buitenste leerlingen gaan. Je klapt weer een oneven aantal keer in je handen. Vermits je vertrok van een even positie en en er een oneven aantal wissels bijtelt, weet je dat je op een oneven getal strandt (zie variant bij bewijs 4: optellen van een even met een oneven getal levert een oneven getal op.). Er was maar 1 oneven leerling meer over. Dit bewijst de truc.

4.4.8 Bewijsjes met veelvouden

Het is ook mogelijk om op dit thema nog wat verder te borduren en zaken te bewijzen over veelvouden, bv.:

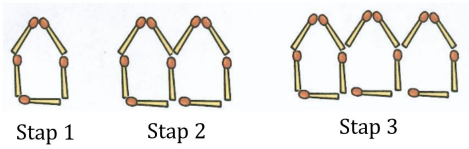
- Bewijst dat de de som, het product en het kwadraat van twee drievouden altijd weer een drievoud is.
- Bewijs dat de som, het product en het kwadraat van twee vijfvouden weer een vijfvoud is.
- ....

4.5 Redeneren met patronen en formules

In Krysinska (2018) en Guissard & Wettendorff (2018a, 2018b) vinden we mooie activiteiten waarin leerlingen zoeken naar een patroon in een rij figuurtjes en dit patroon met een formule uitdrukken. Dit aspect komt opnieuw voor in de huidige eindtermen en leerplannen. Daarnaast zijn onderstaande opdrachten/bewijsjes uitstekend geschikt om te werken aan de eindterm rond mathematiseren. Ook eerstegraadsvergelijkingen oplossen en benaderingstechnieken passeren de revue.

4.5.1 Bewijs 1: Een huizenrij met lucifers

Hieronder zie je hoe een huizenrij gemaakt wordt met lucifers. Enkel de eerste drie stappen zijn getoond.



Maak met de leerlingen eerst een tabel met het aantal lucifers met rij 1,2,..., 5 huisjes. Zoek vervolgens een patroon in die tabel en probeer de leerlingen in eigen woorden te laten verklaren hoe dat patroon kan gelinkt worden aan de manier waarop de huisjes gemaakt zijn. Na een duidelijke tabel met het aantal lucifers, zouden ze dit moeten kunnen modelleren met een formule. Belangrijk is dat ze dit echt in verschillende groepjes doen, want we gaan vervolgens de formules van de verschillende groepjes vergelijken met elkaar. De kans is erg groot dat verschillende groepjes een andere redenering hebben gevolgd, maar toch ook een juiste formule vonden. We gaan dan bewijzen dat de juiste formules van de verschillende groepjes op hetzelfde neerkomen.
Bijvoorbeeld: de ene groep heeft geredeneerd: het eerste huisje is gemaakt met 5 lucifers en telkens worden 4 lucifers toegevoegd. Dit leidt tot de formule: aantal lucifers $= 5 + (n-1) \cdot 4$. *Een andere groep kan gedacht hebben: 5 lucifers per huisje min het aantal gemeenschappelijke lucifers. Dit geeft voor het aantal lucifers* $= n \cdot 5 - (n-1)$. *Nog een andere groep heeft in de tabel gezien dat het aantal lucifers in de n-de stap gelijk is aan* $4n + 1$. *Met rekenregels kan aangetoond worden dat die formules op hetzelfde neerkomen.*
Indien er geen groepjes waren die fundamenteel verschillend geredeneerd hebben (of erger nog, fout geredeneerd waardoor de formule niet klopte), kan je altijd zelf met een 'alternatieve formule' komen en een verklaring hoe je daarop kwam. Dan bewijs je de equivalantie tussen jouw formule en een formule van de leerlingen.

Je kan de zaak nog kruiden met enkele aanvullende vragen: Stel je beschikt over 100 lucifers. Na welke stap zijn er te weinig over om nog een nieuw huisje te kunnen toevoegen?
De leerlingen moeten niet enkel de vergelijking $4n+1=100$ oplossen ($n=\frac{99}{4}$) maar ook naar onder afronden (=benaderingstechnieken). Dat zijn twee eindtermen getallenleer in één klap. Na de 24ste stap dus.

4.5.2 Bewijs 2: Een groeiende rechthoek

Hieronder zie je een rechthoek gemaakt met M&M's. De rechthoek wordt stap voor stap groter.

Stap 1 Stap 2 Stap 3

Je kan nu gelijkaardige vragen met de leerlingen beantwoorden als bij het vorige bewijs:

1. Maak een tabel met het aantal M&M's na stap 1, stap 2, ... stap 5.
2. Zoek een patroon. Maak een formule voor het aantal M&M's na stap n.
3. Vergelijk je formule met die van de andere groepjes.
4. Hoever geraak je met drie zakjes van elk 34 M&M's?

4.5.3 Bewijs 3: De takken van een boom

Een boom heeft eerst twee takken en vanaf dan vertakt elke tak in drie.

1ste vertakking 2de vertakking 3de vertakking

Je kan nu gelijkaardige vragen met de leerlingen beantwoorden als bij het vorige bewijs:

1. Maak een tabel met aantal nieuwe takjes bij de 1ste, 2de , ... 5de vertakking.
2. Zoek een patroon. Maak een formule voor het aantal nieuwe takjes bij de n-de vertakking.

3. Vergelijk je formule met die van de andere groepjes.

4. Hoeveel nieuwe takjes ontstaan er bij de 10de vertakking? En hoeveel takken zijn er dan in totaal (de stam niet meegerekend)?

4.6 Twee evenwijdigen en een snijlijn

Om over hoeken bepaalde zaken te kunnen bewijzen (bv. de som van de hoeken in een driehoek), hebben we een verband nodig tussen evenwijdigheid en hoekgrootte.

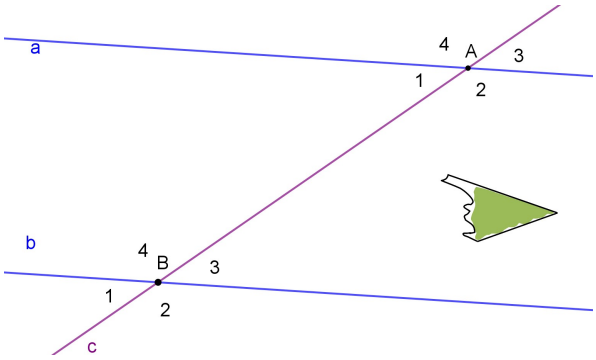
We willen hier het voorbeeld van 'verwisselende binnenhoeken' aangrijpen om het te hebben over een stelling en haar omgekeerde en over een bewijsje uit het ongerijmde. We gaan ervan uit dat de leerlingen al transformaties en hun eigenschappen gezien hebben. Een voordeel van het gebruik van transformaties is dat de eigenschappen van deze transformaties dan gebruikt worden. Het heeft weinig zin deze eigenschappen vast te stellen en te formuleren als er daarna niets meer mee gebeurt. Er is een tijd geweest dat ook de congruentiekenmerken in het secundair onderwijs 'bewezen' werden aan de hand van transformaties, dit paste in een meer globale deductieve opbouw waar we niet voor pleiten. We vermelden hier zowel hoe je het met transformaties kunt doen als zonder.

Bij deze activiteit horen, per duo leerlingen, twee kartonnen hoeken van de grootte van $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_2$. De leerlingen kunnen die gebruiken niet alleen om vast te stellen dat hoekgroottes gelijk zijn maar ook om te zien welke transformaties bruikbaar zijn. In vraag 6 vragen we aan de leerlingen om de gelijkheid van overstaande hoeken te bewijzen, zonder dit te sturen via deelvraagjes. Dit wil niet zeggen dat alle leerlingen dit meteen zullen kunnen. Indien nodig helpt de leraar wel met tips zoals "kun je gebruik maken van nevenhoeken?" of "misschien is er een transformatie die hier nuttig is".

Nog een opmerking over de benamingen: sommige boeken spreken over verwisselende binnen- en buitenhoeken ook wanneer de twee rechten waarbinnen of waarbuiten deze hoeken zich bevinden, niet evenwijdig zijn. In dat geval zegt de eigenschap: "als die twee rechten evenwijdig zijn, dan zijn de verwisselende binnenhoeken (of buitenhoeken) gelijk". Wij gebruiken de term verwisselende binnenhoeken enkel wanneer deze twee rechten evenwijdig zijn. De eigenschap luidt dan dat verwisselende binnenhoeken (of buitenhoeken) altijd gelijk zijn. Het is voor de leraar nuttig om bewust te zijn van het bestaan van deze twee versies.

4.6.1 Eigenschappen van hoeken bij evenwijdige rechten vaststellen

Hieronder zijn de rechten a en b evenwijdig. Ze worden gesneden door de rechte c. De snijpunten zijn A en B.



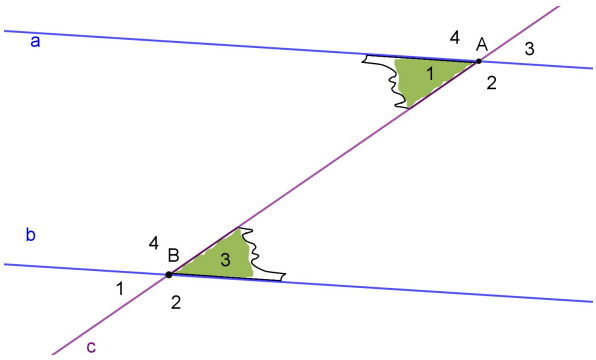
Nevenhoeken zijn hoeken die zowel aanliggend als supplementair zijn (hun som is 180°).Ze hebben dus één been gemeenschappelijk en hun andere benen vormen telkens één rechte. Zo zijn de hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_2$, $\hat{A}_2$ en $\hat{A}_3$, $\hat{A}_3$ en $\hat{A}_4$, $\hat{A}_4$ en $\hat{A}_1$ en ook de hoeken $\hat{B}_1$ en $\hat{B}_2$, $\hat{B}_2$ en $\hat{B}_3$, $\hat{B}_3$ en $\hat{B}_4$, $\hat{B}_4$ en $\hat{B}_1$.

We geven namen aan bepaalde paren van hoeken bij twee evenwijdige rechten en een snijlijn.

- De hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_3$ noemen we **overstaande hoeken**
- De hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_1$ noemen we **overeenkomstige hoeken**
- De hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_3$ noemen we **verwisselende binnenhoeken**
- De hoeken $\hat{A}_3$ en $\hat{B}_1$ noemen we **verwisselende buitenhoeken**.

Laat de leerlingen nu alle hoeken van de figuur noteren waarvan ze vermoeden dat ze gelijk zijn aan $\hat{A}_1$. Ze mogen dit controleren met één van de kartonnen hoeken. Welke hiervan vormen met $\hat{A}_1$ overstaande, overeenkomstige, ... hoeken?

De overstaande hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_3$ zijn gelijk.
De overeenkomstige hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_1$ zijn gelijk.
De verwisselende binnenhoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_3$ zijn gelijk.



Daarna noteren ze ook alle hoeken van de figuur waarvan ze vermoeden dat ze gelijk zijn aan $\hat{A}_4$. Welke hiervan vormen met $\hat{A}_4$ overstaande, overeenkomstige, ... hoeken.

De overstaande hoeken $\hat{A}_4$ en $\hat{A}_2$ zijn gelijk.
De overeenkomstige hoeken $\hat{A}_4$ en $\hat{B}_4$ zijn gelijk.
De verwisselende buitenhoeken $\hat{A}_4$ en $\hat{B}_2$ zijn gelijk.

4.6.2 Deze eigenschappen bewijzen

1. Bewijs dat de overstaande hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_3$ gelijk zijn (dit kwam ook naar voren in het inleidende fragment van Schooltv [Schooltv.nl, 2007])

   Bewijs met nevenhoeken:

   $\hat{A}_1 = 180° - \hat{A}_2$ *(nevenhoeken zijn supplementair)*

   $\hat{A}_2 = 180° - \hat{A}_3$ *(nevenhoeken zijn supplementair)*

   Invullen geeft: $\hat{A}_1 = 180° - (180° - \hat{A}_3) = 180° - 180° + \hat{A}_3 = \hat{A}_3$

   Bewijs met een transformatie:

   De puntspiegeling met centrum A beeldt de hoek $\hat{A}_1$ af op de hoek $\hat{A}_3$. Omdat een puntspiegeling de hoekgrootte bewaart, geldt $\hat{A}_3 = \hat{A}_1$.

2. Welke transformatie beeldt de hoek $\hat{A}_1$ op de overeenkomstige hoek $\hat{B}_1$? Bewijs dat deze overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

   De verschuiving met de vector $\overrightarrow{AB}$. Immers: het schuifbeeld van punt A is punt B; het schuifbeeld van de rechte c is diezelfde rechte c; het schuifbeeld van de rechte a is de rechte door B evenwijdig met a en moet dus wel b zijn. De hoek $\hat{B}_1$ is gelijk aan de hoek $\hat{A}_1$ omdat een verschuiving de hoekgrootte bewaart.

3. Bewijs dat de verwisselende binnenhoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_3$ gelijk zijn. Je kunt steunen op de reeds bewezen gelijkheden van hoeken. je kunt ook met een transformatie werken.

   Bewijs met eerder bewezen gelijkheden:

   $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ *(overeenkomstige hoeken)*

   $= \hat{B}_3$ *(overstaande hoeken).*

   Bewijs met een transformatie:

   De puntspiegeling met als centrum het midden van $[AB]$ beeldt de hoek $\hat{A}_1$ af op de hoek $\hat{B}_3$. Immers, het punt A wordt op het punt B afgebeeld, de rechte a op een rechte door B en evenwijdig met a, dus op b, en de rechte c wordt op zichzelf afgebeeld. Omdat een puntspiegeling de hoekgrootte bewaart, is $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$.

4. Bewijs dat de verwisselende buitenhoeken $\hat{A}_4$ en $\hat{B}_2$ gelijk zijn.

   Volledig analoog

4.6.3 De omgekeerde eigenschappen vaststellen

Tot nu toe hebben we onder andere bewezen: als de rechten a en b evenwijdig zijn, dan zijn de verwisselende binnenhoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_3$ gelijk. In symbolen:

$$a /\!/ b \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_3$$

De omgekeerde eigenschap ontstaat door het implicatieteken $\Rightarrow$ om te keren:

$$a /\!/ b \Leftarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_3$$

Of nog:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_3 \Rightarrow a /\!/ b.$$

De omgekeerde eigenschap zegt dus: "als de hoeken gelijk zijn binnen de rechten a en b en aan weerskanten van de snijlijn, dan zijn a en b evenwijdig".

Uit het vorige hoofdstuk weten dat het is niet omdat de eigenschap geldt, dat de omgekeerde eigenschap automatisch geldt. Er zijn eigenschappen die waar zijn zonder dat de omgekeerde eigenschap waar is. Bv. "$a = 2$ en $b = 3 \Rightarrow a + b = 5$" is waar maar de omgekeerde eigenschap niet! In ons geval is de omgekeerde eigenschap geen logisch gevolg van de eigenschap zelf, maar is die wel waar en kan die wel meetkundig bewezen worden.

We vragen nu aan leerlingen te onderzoeken met één van de kartonnen hoeken of de omgekeerde eigenschap van verwisselende binnenhoeken waar is. Ze tekenen hiertoe een rechte a en een snijlijn c zodat de kartonnen hoek één van de hoeken is tussen a en c. Ze gebruiken de kartonnen hoek om nu een rechte b te bepalen zodat de hoeken 'binnen' a en b en aan wisselende kanten van c gelijk zijn. Ze controleren met de geodriehoek of b evenwijdig is met a.

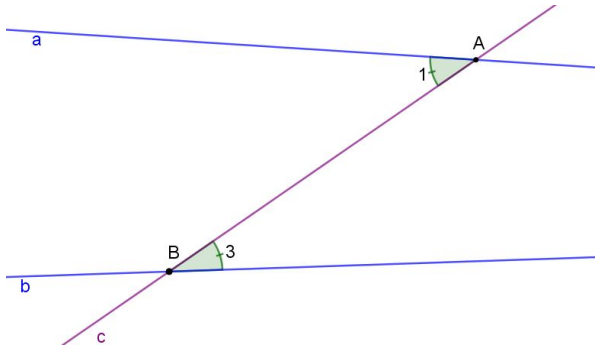
4.6.4 De omgekeerde eigenschappen bewijzen

We willen nu de omgekeerde eigenschap bewijzen:

Gegeven zijn twee rechten a en b (we weten nog niet of die evenwijdig zijn) en een snijlijn. Gegeven is ook dat de hoeken $\hat{A}_1$ en $\hat{B}_3$, binnen a en b en aan weerskanten van de snijlijn, gelijk zijn. Te bewijzen is dat $a /\!/ b$.

Om dit te doen gaan we even veronderstellen dat a en b niet evenwijdig zijn, en proberen aan te tonen dat dit leidt tot iets onmogelijks. We spreken van een **bewijs uit het ongerijmde**. Dit gaat allicht te ver voor sommige leerlingen.

Veronderstel dat a en b niet evenwijdig zijn. Dan hebben we een situatie zoals op de volgende figuur.



We zouden graag de eigenschap 'verwisselende binnenhoeken zijn gelijk' gebruiken. Maar met de rechten a en b gaat dit niet, want de eigenschap werkt enkel als je evenwijdigen hebt en daar mogen we absoluut niet vanuit gaan, want dat moeten we bewijzen. Laat de leerlingen een extra rechte tekenen, zodanig dat je deze eigenschap wel kunt gebruiken. We laten zien dat dit tot iets onmogelijks leidt.

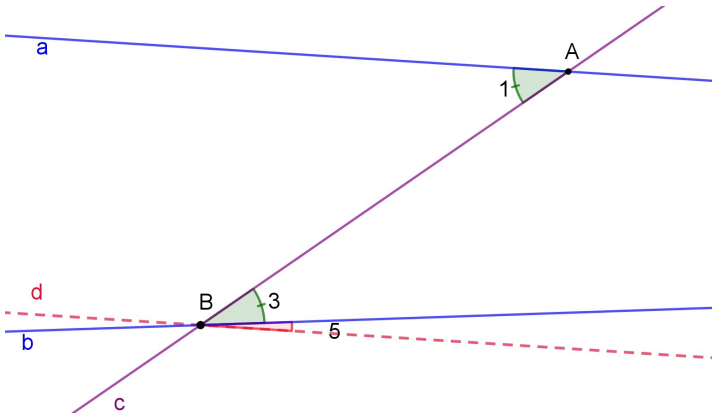
De leerlingen tekenen bv. door B een evenwijdige d met a. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \hat{B}_3 &= \hat{A}_1 && \textit{(gegeven)} \\ &= \hat{B}_3 + \hat{B}_5 && \textit{(verwisselende binnenhoeken).} \end{aligned}$$

Maar dan moet

$$\hat{B}_5 = 0^\circ,$$

wat niet kan als b niet evenwijdig is met a.



De veronderstelling dat a en b niet evenwijdig zijn, leidt dus tot onzin en kan niet waar zijn. Besluit: a en b zijn toch evenwijdig.

Bewijzen uit het ongerijmde komen vaak voor in de wiskunde. Men veronderstelt dat hetgeen men wil bewijzen niet waar is en men toont aan dat dit niet kan omdat het tot onzin leidt.

Omdat we bewezen hebben dat zowel de eigenschap als de omgekeerde eigenschap gelden, kunnen we zeggen:

$$a /\!/ b \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_3.$$

Varianten
Wat is het verband tussen twee opeenvolgende hoeken van een parallellogram? Bewijs dit.

4.7 Som van de hoeken van een driehoek

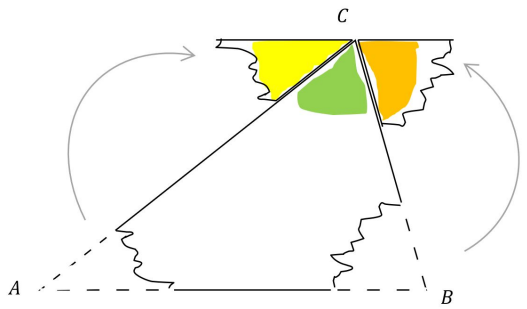
Als je een zijde en de twee aanliggende hoeken van een driehoek kent, ligt de derde hoek vast. Deze vaststelling geeft aan dat er een verband moet zijn tussen de hoekgroottes van de drie hoeken. Leerlingen kunnen de hoeken meten en optellen. Afhankelijk van de meetnauwkeurigheid zullen ze iets in de buurt van 180 uitkomen. Dit bewijst nog niet dat de som 180 is; het zou bv. ook 179,9 kunnen zijn.

In de lesactiviteiten hieronder bewijzen de leerlingen op drie manieren dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan 180.

Je kunt de klas in drie groepen verdelen en door elke groep één bewijs laten uitwerken en nadien aan de anderen laten uitleggen. De lesactiviteit zet op weg om het bewijs te vinden. Daarna is het nuttig om de leerlingen het bewijs netjes te laten uitschrijven (niet meer met vragen en antwoorden).

4.7.1 Bewijs 1: Het scheurbewijs

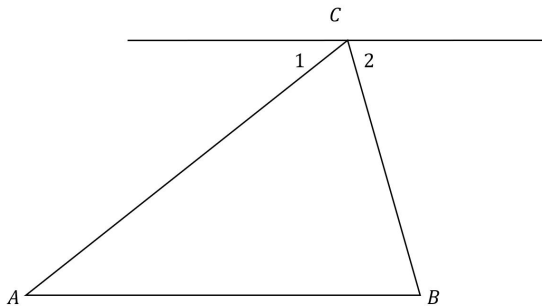
Teken een(grote) willekeurige driehoek ABC. Geef elke hoek een andere kleur. Scheur de hoeken $\hat{A}$ en $\hat{B}$ en plaats ze tegen de hoek $\hat{C}$ zodat ze aanliggende hoeken worden.



We construeren tegen de driehoek (aan de linkerkant) een hoek met hoekpunt C en been $[CA$ die even groot is als de hoek $\hat{A}$. Analoog construeren we aan de rechterkant een hoek met hoek punt C en been $[CB$ even groot als $\hat{B}$. Dit weten we door de eigenschap van de verwisselde binnenhoeken. Alle hoeken vormen nu één rechte, de som is dus 180°. (Je kan hier iets wiskudiger zijn voor sterkere leerlingen: Beide halfrechten zijn evenwijdig met AB door 'verwisselende binnenhoeken omgekeerd'. Omdat er door C maar één rechte bestaat die evenwijdig is met AB, liggen beide halfrechten op dezelfde rechte. Dus: de som is 180.)

4.7.2 Bewijs 2: bewijs met een evenwijdige

Teken een rechte door C evenwijdig met AB.

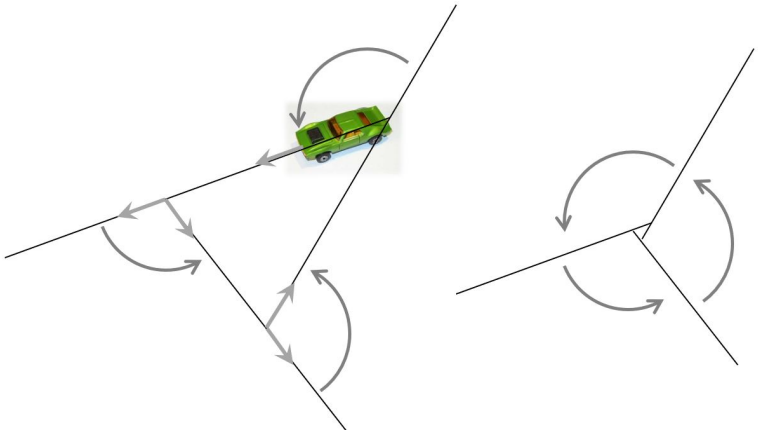


De hoek $\hat{C}_1$ (zie figuur) is gelijk aan $\hat{A}$ en de hoek $\hat{C}_2$ is gelijk aan $\hat{B}$, wegens verwisselende binnenhoeken. De som van de hoeken van de driehoek $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ is gelijk aan $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}$ en dat is 180°.

Merk op dat het scheurbewijs en dit bewijs amper van elkaar verschillen.

4.7.3 Bewijs 3: met een telegeleide auto

Veronderstel dat je het autootje op de figuur hieronder vanop afstand kunt besturen. Je hebt een knop om die vooruit te laten rijden en je hebt een wieltje om die te laten draaien. Het is een fictieve auto en die draait ook een beetje anders dan echte auto's. Als die draait, gebeurt dit rond het midden van zijn achterbumper.
Stel dat je de auto vooruit laat rijden vanuit de positie op de figuur, tot het midden van de achterbumper in het volgende hoekpunt staat. Je ziet dan dat je de auto moet laten draaien over het supplement van de hoek van de driehoek in dat hoekpunt om op de volgende zijde te kunnen rijden.



We laten de auto op die manier helemaal rond de driehoek rijden, tot hij weer in de beginpositie staat. We bekijken hoe de auto nu in totaal gedraaid is. Tip: laat in gedachten de driehoek piepklein worden zoals op de figuur ernaast.

De auto is gedraaid over een volle hoek (360°). Het verkleinen van de driehoek zorgt voor wat psychologen een 'Gestalt' noemen: eens je het ziet, kun je het niet meer niet zien... Als (overkritische) leerlingen het kijken naar een 'piepkleine' driehoek nog niet overtuigend genoeg vinden, kunnen ze ook meteen het limietgeval creëren: een punt tekenen en vanuit dit punt halfrechten evenwijdig met de benen van de hoeken waarover de auto draait. De som van deze hoeken is gelijk aan 360°.

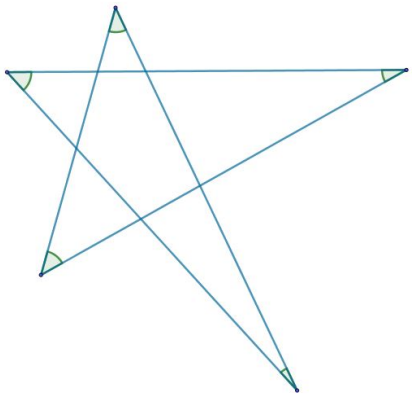
We weten nu dat de som van de supplementen van de hoeken van de driehoek 360° is. Dit bewijst dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is omdat:

$$180^\circ - \hat{A} + 180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{C} = 360^\circ \quad \text{(som van de supplementen van de hoeken van een } \triangle \text{ is } 360^\circ\text{)}$$
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

4.7.4 Hoekensommen in andere veelhoeken

Andere veelhoeken

De leerlingen kunnen, steunend op de som van de hoeken in een driehoek, de som van de hoeken in een vierhoek, vijfhoek, ... n-hoek zoeken. Een mogelijke werkwijze is het tekenen



Figuur 4.2: *Stervijfhoek*

van diagonalen vanuit één hoekpunt. Op die manier wordt een vierhoek verdeeld in twee driehoeken, een vijfhoek in drie driehoeken, ... een n-hoek in $n-2$ driehoeken. Op die manier is de som van de hoeken van een vierhoek $360°$, van een vijfhoek $540°$, ... van een n-hoek $(n-2)\cdot 180°$. Verdelen de leerlingen de veelhoek in driehoeken vanuit een centraal punt binnen de veelhoek, dan verdelen ze hiermee de n-hoek in n driehoeken, maar hierbij creëren ze een overtollige volle hoek die nog van de som $n \cdot 180°$ moet worden afgetrokken om de som van de hoeken van de n-hoek te verkrijgen.

De stervijfhoek

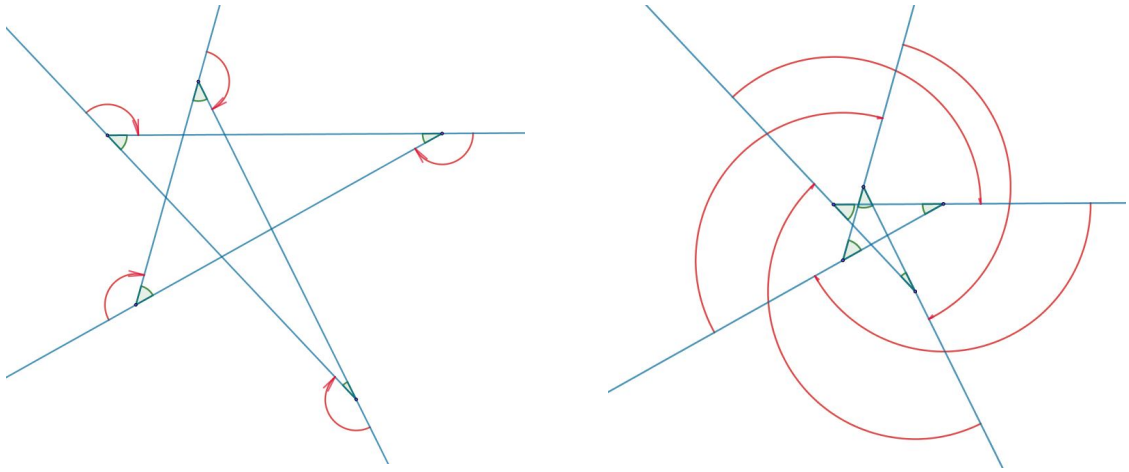
Een wat zwaardere oefening op de som van de hoeken in veelhoeken gaat over een stervijfhoek. We bepalen de som van de 'uitspringende' hoeken van de stervijfhoek (figuur 4.2).

Met GeoGebra of door goed te meten komen de leerlingen er snel achter dat de som gelijk is aan 180, maar om het te bewijzen moeten ze systematisch te werk gaan. We zetten de lezer op weg zonder alle details uit te schrijven.

Ze kunnen werken met driehoeken gevormd door één hoek van de binnenste vijfhoek en twee 'uitsteeksels'. Als ze van de som van de hoeken van deze vijf driehoeken $(5 \cdot 180°)$ de som van de hoeken van de binnenste vijfhoek $(3 \cdot 180°)$ aftrekken, dan moeten ze nog delen door twee want ze hebben elke aangeduide hoek twee keer geteld.

Ze zouden ook kunnen werken met de vijf buitenste driehoeken. De som is $5 \cdot 180°$, waarvan ze twee keer de som van de buitenhoeken van de binnenste vijfhoek moeten aftrekken want die zijn teveel geteld.

Ook het telegeleid autootje kan hier heel nuttig zijn om een kort bewijs op te stellen. De auto maakt in totaal twee verschillende wentelingen $(4 \cdot 180°)$ en dus blijft er om 5 gestrekte hoeken te maken nog $180°$ over voor de hoeken van de ster (zie figuren 4.3).



Figuur 4.3: *Autootje langs de stervijfhoek*

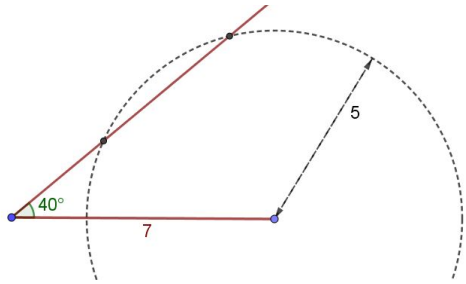
4.8 Bewijzen met congruente driehoeken

Het gebruik van congruente driehoeken om te bewijzen dat lijnstukken even lang zijn of dat hoeken even groot zijn, is niet nieuw en kreeg ook in het huidige leerplan veel aandacht. Omdat dit bij de lezers erg bekend is, werken we hier geen lesactiviteiten uit, maar beperken we ons tot enkele ideeën die we willen benadrukken.

Het voordeel van congruentiekenmerken is dat het voor de bewijzende leerling een duidelijk kader biedt.

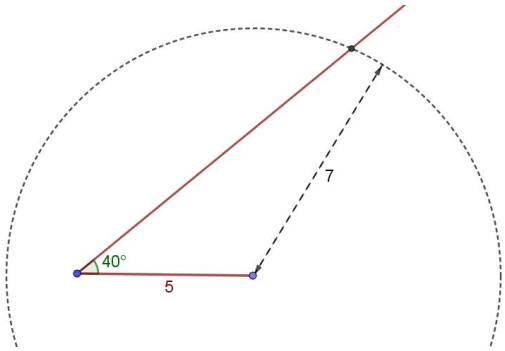
Om te bewijzen dat twee lijnstukken even lang zijn (voor twee hoeken is het analoog), moet je op zoek gaan naar twee driehoeken waarbij het ene lijnstuk een zijde is van de ene driehoek en het andere lijnstuk een zijde is van de andere driehoek. Uiteraard moet je geen driehoeken nemen waarvan je meteen ziet dat ze niet congruent kunnen zijn (een 'korte dikke' en een 'lange magere' maken geen kans...). Soms moet je iets bijtekenen omdat de geschikte driehoeken nog niet voorhanden zijn. Vervolgens moet je, steunend op wat gegeven is, aantonen dat één van de congruentiekenmerken geldig is: een voldoende voorwaarde voor congruentie. De congruentiekenmerken van driehoeken bestaan uit drie gelijkheden (ZZZ, ZHZ, HZH, HHZ, ZZ90°).

Merk op: ZZH is geen congruentiekenmerk omdat het soms mogelijk is om twee driehoeken te tekenen die aan deze voorwaarden voldoen maar niet congruent zijn. In figuur 4.4 probeer ik een driehoek met $5, 7, 40°$ te maken, in die volgorde. Ik teken een lijnstuk van lengte 7 en aan één uiteinde hiervan een hoek van 40°. Aan het andere uiteinde moet een zijde van lengte 5 komen. Met de passer zie ik dat er twee mogelijkheden zijn voor het derde hoekpunt en deze mogelijkheden leveren driehoeken met $5, 7, 40°$ op die niet congruent zijn.



Figuur 4.4

Wanneer de hoek tegenover de langste van deze twee zijden staat, dan kan dit niet. In figuur 4.5 probeer ik een driehoek met $7, 5, 40°$ te maken en nu is er maar één mogelijkheid. De cirkel snijdt de halfrechte maar in één punt. ZZH (lange zijde, korte zijde, hoek) is wel een congruentiekenmerk.



Figuur 4.5

In het secundair onderwijs wordt hiervan meestal enkel het speciale geval ZZ90° vermeld. Het is een speciaal geval van ZZH want de schuine zijde is inderdaad altijd langer dan één van de rechthoekszijden.

We pleiten ervoor om genoeg aandacht te besteden aan het 'zoeken' van zo'n bewijs en niet enkel aan het correct opschrijven ervan. Bewijzen is altijd een vorm van problem solving.

Het voordeel van de congruentiekenmerken, het duidelijke kader waarbinnen de leerlingen naar een dergelijk bewijs kunnen zoeken, mag er niet toe leiden dat dit de enige bewijzen zijn waar de leerlingen mee kennis maken. Elke juiste redenering waarmee je in wiskunde overtuigt, is een bewijs. Om die reden begonnen we dit hoofdstuk met andere bewijzen, over getallen en algebra: bewijzen komt niet enkel in meetkunde voor en beperkt zich niet tot een vaste vorm of methode.

4.8.1 Middelloodlijn en bissectrice

Middelloodlijn van een lijnstuk

De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek zijn gedefinieerd als rechten die voldoen aan een bepaalde voorwaarde. De middelloodlijn van een lijnstuk gaat, zoals de naam het zegt, door het midden van het lijnstuk en staat er loodrecht op. De bissectrice van een hoek gaat door het hoekpunt en verdeelt de hoek in twee gelijke hoeken.

Als je deze rechten wilt bekijken als verzamelingen van punten (meetkundige plaatsen), dan gaat het over de voorwaarde voor een punt van het vlak om op die rechte gelegen te zijn. Dit vormt een goede gelegenheid om het te hebben over implicatie en equivalentie.

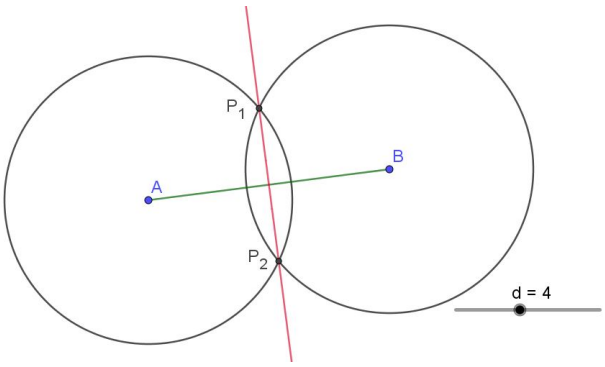
Als een punt op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt, dan ligt het even ver van beide eindpunten:

$$P \text{ ligt op mll}[AB] \Rightarrow |PA| = |PB|.$$

Maar ook: als een punt even ver van twee punten ligt, dan ligt het op de middelloodlijn van het lijnstuk dat die twee punten verbindt:

$$|PA| = |PB| \Rightarrow P \text{ ligt op mll}[AB].$$

Om de omgekeerde implicatie met GeoGebra te ontdekken, teken je de twee punten A en B en maak je een schuifbalk aan die een variabele afstand d voorstelt. Je construeert de punten op afstand d van A en van B. Dit zijn de twee snijpunten P_1 en P_2 van de cirkels met middelpunten A en B en straal d. Nu zou je er de middelloodlijn van $[AB]$ kunnen bij tekenen en vaststellen dat deze snijpunten erop liggen. Je kunt ook de meetkundige plaats van P_1 (klikken op 'meetkundige plaats', P_1, d) en van P_2 laten tekenen en je ziet dat de middelloodlijn ontstaat.



Figuur 4.6: *De omgekeerde eigenschap van de middelloodlijn met GeoGebra*

Beide implicaties kunnen worden bewezen met congruente driehoeken. De figuren zien er hetzelfde uit, maar het gegeven en het te bewijzen zijn anders. Je kunt met de leerlingen afspreken dat ze op hun tekening vaste kleuren gebruiken voor het gegeven en het te bewijzen. Bij de eerste implicatie steunen ze op het kenmerk zhz. Bij de tweede implicatie moeten ze beslissen wat ze, behalve het lijnstuk $[AB]$ en de gelijke afstanden $|PA|$ en $|PB|$, bijtekenen.

Tekenen ze uit P een loodlijn op $[AB]$, dan kunnen ze het kenmerk zz90 gebruiken om aan te tonen dat deze loodlijn door het midden van $[AB]$ gaat en dus de middelloodlijn van $[AB]$ is. Maar als ze punt P verbinden met het midden van $[AB]$, dan moeten ze zzz gebruiken en hiermee bewijzen dat deze verbindingslijn loodrecht staat op $[AB]$.

De eerste implicatie wordt ook ook wel als volgt geformuleerd: $|PA| = |PB|$ is een *nodige voorwaarde* voor punt P om op de middelloodlijn van $[AB]$ te liggen. De tweede implicatie: $|PA| = |PB|$ is een *voldoende voorwaarde* voor punt P om op de middelloodlijn van $[AB]$ te liggen. Even ver van de eindpunten liggen is dus een 'nodige en voldoende' voorwaarde om op de middelloodlijn te liggen:

$$P \text{ ligt op mll}[AB] \Leftrightarrow |PA| = |PB|$$

Dus: de middelloodlijn van $[AB]$ is de verzameling (meetkundige plaats) van de punten van het vlak die even ver van A als van B liggen.

Bissectrice van een hoek

Voor de bissectrice van een hoek $\hat{A} = B\hat{A}C$ is het gedeeltelijk analoog, maar de nodige en voldoende voorwaarde is niet zomaar

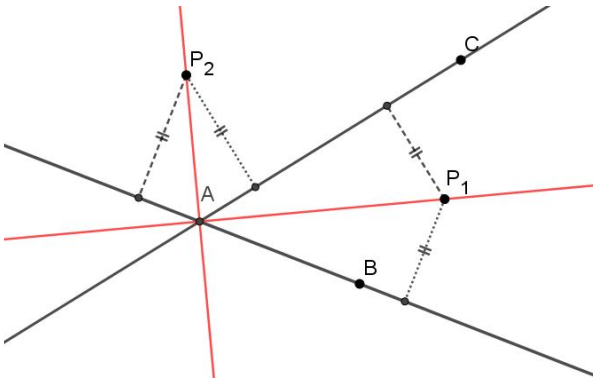
$$P \text{ ligt op biss } \hat{A} \Leftrightarrow d(P, AB) = d(P, AC)$$

maar wel:

$$\begin{gathered}\text{Voor } P \text{ binnen } \hat{A} \text{ geldt:}\\ P \text{ ligt op biss } \hat{A} \Leftrightarrow d(P, AB) = d(P, AC)\end{gathered}$$

of:

$$\begin{gathered}d(P, AB) = d(P, AC)\\ \Leftrightarrow P \text{ ligt op één van de bissectrices van de rechten } AB \text{ en } AC\end{gathered}$$



Figuur 4.7: *Punten even ver van twee gegeven rechten*

De meetkundige plaats van de punten op gelijke afstand tot twee snijdende rechten is immers de unie van twee rechten, die loodrecht op elkaar staan (figuur 4.7).

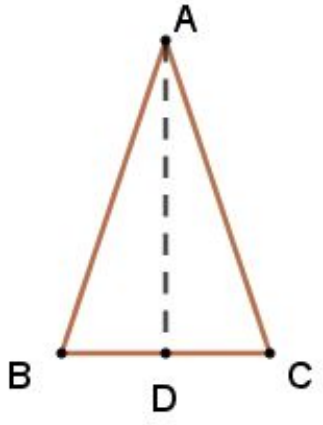
Ruimer kader

Schatteman (2010) pleit om de eigenschappen van de middelloodlijn en de bissectrice boeiender aan te brengen, als onderdeel van een ruimer onderzoek: welke punten liggen even ver van één punt, van twee punten, van drie punten...? Welke punten liggen even ver van één rechte, van twee rechten, van drie rechten...? Dit maakt het veel interessanter dan de aankondiging "we hebben de definitie van de middelloodlijn gezien, nu gaan we er een eigenschap van bewijzen".

4.8.2 De gelijkbenige driehoek

De eigenschap "de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk" en de omgekeerde eigenschap "als een driehoek twee gelijke hoeken heeft, dan is die driehoek gelijkbenig" zijn erg dankbaar om leerlingen naar bewijzen te laten zoeken en te laten ervaren dat verschillende bewijzen mogelijk zijn. Je kunt de leerlingen, bv. per twee, hun eigen bewijs laten opstellen en dan alle gevonden bewijzen (in de hoop dat er verschillende zijn) samenbrengen. Het is natuurlijk niet nodig dat 'alle' mogelijkheden uit de bus komen maar het zou hier jammer zijn om door teveel sturing de leerlingen allemaal op één zelfde spoor te sturen.

Om de rechtstreekse stelling te bewijzen, veronderstellen we dat de zijden $|AB|$ en $|AC|$ gelijk zijn. De leerlingen moeten aantonen dat de hoeken $\hat{B}$ en $\hat{C}$ gelijk zijn. Hiervoor hebben ze twee congruente driehoeken nodig, één met hoekpunt B en één met hoekpunt C. Wanneer ze een rechte bijtekenen om de driehoek in twee driehoeken te verdelen, is het belangrijk dat ze erbij zeggen welke rechte ze tekenen. De tekening ziet er telkens hetzelfde uit (op de aanduiding van gelijke lengtes of hoeken na) en na het bewijs zal blijken dat dit telkens dezelfde rechte is, maar de redenering is wel telkens anders.



Figuur 4.8

- Nemen ze de zwaartelijn uit A, dan zijn de deeldriehoeken congruent door ZZZ.
- Nemen ze de hoogtelijn uit A, dan zijn de deeldriehoeken congruent door ZZ90°.
- Nemen ze de bissectrice van $\hat{A}$, dan zijn de deeldriehoeken congruent door zhz.

- Ze kunnen ook steunen op de omgekeerde eigenschap van de middelloodlijn (zie 4.1): omdat A even ver ligt van B als van C, ligt A op mll$[BC]$. Bij deze aanpak hebben ze de keuze tussen ZZZ, ZZ90° en ZHZ.
- Ten slotte, maar weinig leerlingen denken hieraan, is het ook mogelijk om niets bij te tekenen en te zeggen dat driehoek ABC congruent is met driehoek ACB (wegens ZZZ of ZHZ). Congruente driehoeken mogen immers overlappen en zelfs samenvallen..

Voor de omgekeerde eigenschap is gegeven dat $\hat{B} = \hat{C}$ en moeten we bewijzen dat $|AB| = |AC|$. Ook hier hebben de leerlingen keuze tussen verschillende mogelijkheden. Het is hierbij belangrijk te benadrukken dat deze omgekeerde eigenschap niet zomaar een gevolg is van de rechtstreekse eigenschap. (Zie 3.1.)

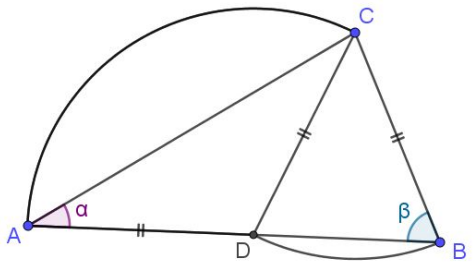
- Met de zwaartelijn: ZZH (omdat dit geen kenmerk van congruentie is, neem je beter een andere rechte, al klopt het in dit geval omdat de zwaartelijn de langste zijde is...).
- Met de hoogtelijn: HHZ.
- Met de bissectrice: HHZ.
- Ook hier is het mogelijk om te zeggen dat driehoek ABC congruent is met driehoek ACB (HZH of HHZ).

Varianten

Nog een paar (bewijs)opgaven over basishoeken van een gelijkbenige driehoek (naar: Schmid & Schweitzer, 1990).

- In figuur 4.9: hoe groot is β als $\alpha = 25°$ is? Voor welke waarde van α is de driehoek BCD gelijkzijdig?

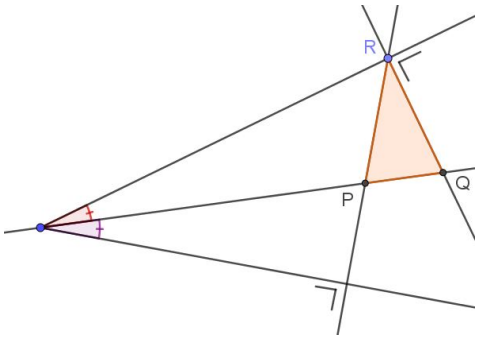
  De hoek β is het dubbel van α. Voor $\alpha = 30°$ is β dus 60° en dan is BCD gelijkzijdig omdat die twee (en dus drie) hoeken van 60° heeft.



Figuur 4.9

- Onderzoek zonder te meten of de driehoek PQR in figuur 4.10 gelijkbenig is.

  Het antwoord is positief omdat de hoeken $\hat{P}$ en $\hat{Q}$ van deze driehoek gelijk zijn. We laten de lezer zelf ontdekken waarom.



Figuur 4.10

4.8.3 Eigenschappen en kenmerken van vierhoeken

Een mooie en eenvoudige context om eigenschappen te ontdekken, te ordenen en te bewijzen wordt gevormd door de klassieke speciale vierhoeken: trapezia, parallellogrammen, ruiten, rechthoeken, vierkanten (en eventueel ook gelijkbenige trapezia en vliegers). In De Bock & Roelens (1990) beschreven we hoe we toekomstige leraren zelf orde laten scheppen in welke eigenschappen wel en niet gelden, om dan zelf een ordelijke theorie, met bewijzen, op te bouwen gebaseerd op de classificatie van de speciale vierhoeken. Een eigenschap die geldt voor parallellogrammen en voor ruiten, bewijzen ze best voor een parallellogram, want dan is die eigenschap automatisch ook bewezen voor een ruit. Een ruit is immers een speciaal geval van een parallellogram. Iets dergelijks in het klein kan ook met leerlingen eerste graad. Veel huidige handboeken voorzien trouwens een verkenning van wel of niet geldende eigenschappen.

De eigenschappen van het parallellogram die op die manier weerhouden worden, zijn:

- In een parallellogram zijn de overstaande zijden twee aan twee even lang.
- In een parallellogram zijn de overstaande hoeken twee aan twee even groot.
- In een parallellogram snijden de diagonalen elkaar middendoor.

Een voorbeeld van een eigenschap die *niet* geldt: in een parallellogram zijn de diagonalen bissectrices van de hoeken. Om te zien dat de eigenschap niet geldt, tekenen de leerlingen best een redelijk 'extreem' parallellogram, dat genoeg afwijkt van een ruit, want in een ruit geldt deze eigenschap wel...

In een rechthoek gelden de eigenschappen van het parallellogram ook, want een rechthoek is een parallellogram. Er komt nog een eigenschap bij: in een rechthoek zijn de diagonalen even lang. Merk op: als ook het gelijkbenig trapezium 'meedoet' in deze theorie, waarbij de rechthoek gezien wordt als een speciaal geval van een gelijkbenig trapezium, dan wordt de eigenschap over de even lange diagonalen voor het gelijkbenig trapezium bewezen en geldt die dan automatisch ook voor een rechthoek.

Al deze en andere eigenschappen zijn mooi te bewijzen met congruente driehoeken. Zoals eerder benadrukt, is het de bedoeling dat de leerlingen zelf die bewijzen leren opstellen, door

geschikte congruente driehoeken te zoeken afhankelijk van het te bewijzen.

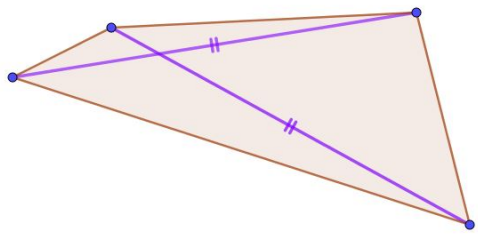
Sommige eigenschappen gelden ook omgekeerd en worden daarom *kenmerken* genoemd. Dit is het geval voor de drie eerder vermelde eigenschappen van het parallellogram.

De eigenschap 'in een parallellogram snijden de diagonalen elkaar middendoor' en de omgekeerde eigenschap "een vierhoek met diagonalen die elkaar middendoor snijden is een parallellogram" kunnen worden samengevat worden door te zeggen dat het middendoor snijden van de diagonalen een *kenmerk* is van parallellogrammen. Het is zelfs gewoon een alternatieve definitie (een vierhoek waarbij de diagonalen elkaar middendoor snijden is een parallellogram) Dit komt neer op de equivalentie:

voor een vierhoek $ABCD$ waarbij de diagonalen AC en BD elkaar snijden in S geldt:

$$\begin{gathered} ABCD \text{ is een parallellogram} \\ \Leftrightarrow |AS| = |SC| \text{ en } |BS| = |SD|. \end{gathered}$$

De eigenschap 'In een rechthoek zijn de diagonalen even lang.' is geen kenmerk van de rechthoek. Als je immers 'zomaar' twee even lange lijnstukken tekent die elkaar snijden en je verbindt de eindpunten, dan heb je een vierhoek met even lange diagonalen dat geen parallellogram hoeft te zijn (figuur 4.11). Eén tegenvoorbeeld volstaat om te bewijzen dat een eigenschap niet geldt!



Figuur 4.11: *Even lange diagonalen is geen kenmerk van rechthoeken.*

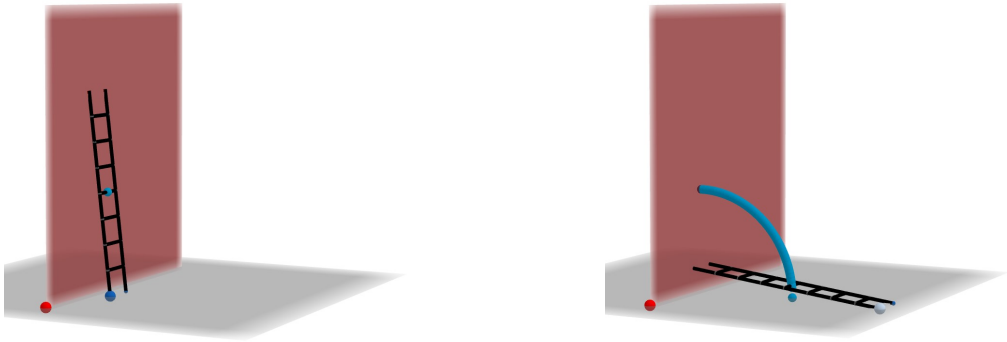
Andere voorbeelden van eigenschappen die geen kenmerken zijn van het parallellogram: "één paar overstaande zijden die even lang zijn", of "één paar overstaande zijden die evenwijdig zijn". Het is gemakkelijk om telkens een tegenvoorbeeld te tekenen. Maar als je deze twee eigenschappen combineert, krijg je wel een kenmerk. Een vierhoek met één paar evenwijdige en even lange overstaande zijden, is altijd een parallellogram. Of nog: voor een vierhoek $ABCD$ geldt:

$$\begin{gathered} ABCD \text{ is een parallellogram} \\ \Leftrightarrow AB /\!/ DC \text{ en } |AB| = |DC| \end{gathered}$$

Een toepassing: de schuivende ladder

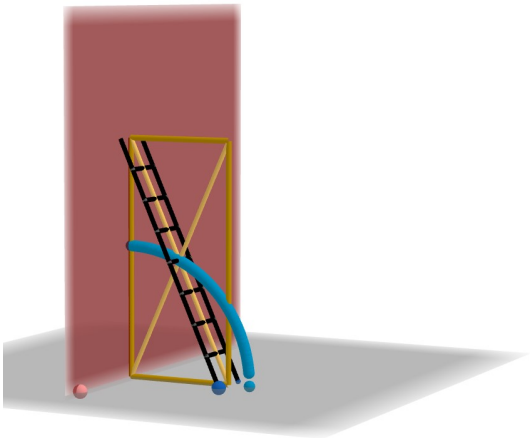
Een mooie toepassing is de schuivende ladder. Je vraagt aan de leerlingen welke baan het middelpunt van de ladder aflegt in de ruimte als de ladder begint te schuiven. De onderkant

van de ladder glijdt op de grond en de bovenkant van de ladder glijdt naar beneden langs de gevel. Het eerste idee van de leerlingen, en ook van volwassenen die het probleem nog niet kennen, is ofwel een recht lijnstuk ofwel een kromme met de holle kant naar boven gericht. De juiste baan is echter een kwartcirkel zoals in figuur **??**, loodrecht op gevel en grond.



Figuur 4.12: *Het probleem van de schuivende ladder met de baan van het middelpunt*

De verklaring is een mooie toepassing van de eigenschappen van de diagonalen van een rechthoek. Het midden van de ladder is het midden van één van de diagonalen van een (variabele) rechthoek, zie figuur 4.13. Omdat de diagonalen van een rechthoek elkaar middendoor snijden, is dit ook het midden van de andere diagonaal van die rechthoek. Omdat de diagonalen van een rechthoek even lang zijn, is de andere diagonaal ook even lang als de ladder en die lengte verandert niet tijdens het glijden. Dit betekent dat het midden van de ladder zich op elk moment op een vaste afstand (de halve ladderlengte) bevindt van het (vaste!) hoekpunt van de rechthoek op de grond en tegen de gevel. Dit bewijst dat het midden van de ladder op een cirkel beweegt en dus dat de baan een stuk cirkel is. Je kan dit ook mooi illustreren met Geogebra (zoek op schuivende ladder op geogebra.org)



Figuur 4.13: *Bewijs met de diagonalen van een variabele rechthoek*

4.8.4 Middenparallel en de stelling van Varignon

De eigenschap van de middenparallel

De eigenschap over de middenparallel zegt dat het lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, evenwijdig is met en half zo lang als de derde zijde. Dit wordt meestal in de tweede graad behandeld, als toepassing van gelijkvormige driehoeken. Het is echter ook mogelijk om deze eigenschap te bewijzen steunend op eigenschappen en kenmerken van parallellogrammen. We vonden dit in Schatteman (2010). Op die manier zou die al in de eerste graad aan bod kunnen komen.

Het bewijs met gelijkvormige driehoeken is eenvoudiger: kies je voor de eenvoud, dan stel je dit uit tot de tweede graad. Maar zoek je een toepassing van de eigenschappen en kenmerken van het parallellogram, dan is dit wel een hele mooie. We beschrijven hieronder eerst het zoekproces naar het bewijs. Dit is minstens even belangrijk als het bewijs zelf. Als je meteen het bewijs zou lezen, zou het "uit de lucht vallen", maar als je het zoekproces doorloopt, begrijp je waarom je het zo aanpakt. Dit zoekproces moet je natuurlijk begeleiden.

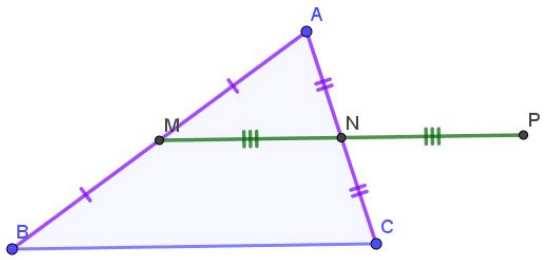
Je moet het niet helemaal "voordoen" maar zeker ook niet overlaten aan de leerlingen als zelfstandig werk...

Bewijs met eigenschappen en kenmerken van parallellogrammen

Gegeven: een driehoek ABC, M is het midden van $[AB]$ en N het midden van $[AC]$.

Te bewijzen: $MN \parallel BC$ en $2 \cdot |MN| = |BC|$.

Het idee is om $[MN]$ te verlengen tot het twee keer zo lang is. We construeren dus punt P zodat N het midden is van $[MP]$ (figuur 4.14). Dan willen we proberen te bewijzen dat $[MP]$ evenwijdig is met en even lang als $[AB]$. We moeten met andere woorden bewijzen dat $BCPM$ een parallellogram is.



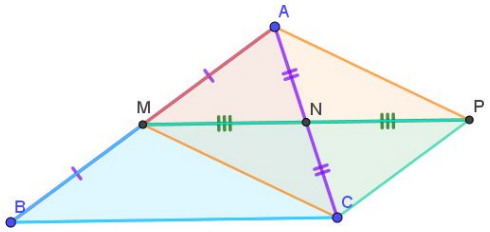
Figuur 4.14: *Bewijs middenparallel*

Hoe kunnen we dat doen? Met de definitie van parallellogram of met een kenmerk. De definitie kunnen we niet gebruiken want de evenwijdigheid van BC en MP moeten we juist bewijzen. Het kenmerk over middendoor snijdende diagonalen lijkt hier ook niet geschikt want

we weten helemaal niets over $[MC]$ en $[BP]$. Er bestaat ook nog het kenmerk over een paar even lange en evenwijdige zijden. We kunnen dit niet toepassen op de zijden $[BC]$ en $[MP]$ want dat is weer het te bewijzen. Dus: we proberen aan te tonen dat $[BM]$ en $[CP]$ evenwijdig en even lang zijn. Als dat lukt, dan is $BCPM$ een parallellogram en dan is de buit binnen!

Belangrijk is altijd de gegevens te gebruiken. We moeten iets doen met het gegeven dat M het midden is van $[AB]$.

$[MB]$ is even lang als $[AM]$ omdat M het midden is. In plaats van te bewijzen dat $[BM]$ en $[CP]$ evenwijdig en even lang zijn, mogen we dus even goed bewijzen dat $[MA]$ en $[CP]$ evenwijdig en even lang zijn! Het volstaat dus te bewijzen dat $MAPC$ een parallellogram is (figuur 4.15). Maar dat is het geval want $[MP]$ en $[AC]$ snijden elkaar middendoor! Na dit zoekproces 'van achter naar voor' kunnen we samen met de leerlingen het bewijs netjes 'van voor naar achter' opschrijven.



Figuur 4.15: *Bewijs middenparallel, vervolg*

Bewijs

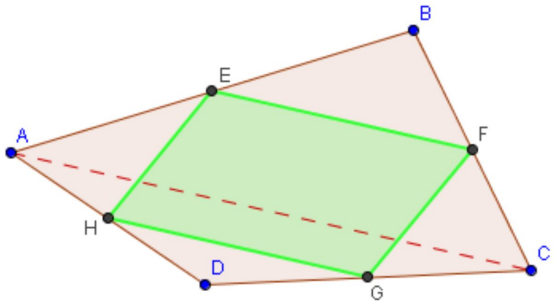
- Construeer punt P zo dat N het midden is van $[MP]$.
- In de vierhoek $MAPC$ snijden de diagonalen $[MP]$ en $[AC]$ elkaar middendoor in punt N (constructie en gegeven).
- De vierhoek $MAPC$ is dus een parallellogram (kenmerk diagonalen snijden middendoor).
- Dus: $|MA| = |CP|$ en $MA /\!/ CP$ (eigenschappen parallellogram).
- Dus: $|BM| = |CP|$ en $BM /\!/ CP$ (M is het midden van $[AB]$).
- De vierhoek $BCPM$ is dus een parallellogram (kenmerk een paar even lange en evenwijdige zijden).
- Dus: $|MP| = |BC|$ en $MP /\!/ BC$ (eigenschappen parallellogram).
- Dus: $2 \cdot |MN| = |BC|$ en $MN /\!/ BC$.

Hiermee is het bewijs af.

De stelling van Varignon

Vraag aan elke leerling om een willekeurige vierhoek te tekenen en de middens van de zijden te verbinden tot een nieuwe vierhoek. Verrassende vaststelling: iedereen verkrijgt een parallellogram (dat toevallig een ruit of rechthoek kan zijn). Om dit met GeoGebra vast te stellen, is één tekening genoeg want je kunt de hoekpunten van de gegeven vierhoek nog verplaatsen.

Kunnen de leerlingen het ook bewijzen? Als je deze opgave net na de middenparallel aanbiedt, geef je misschien onrechtstreeks een tip weg. Middenparallellen komen voor in driehoeken, niet in een vierhoek... Dit brengt misschien de leerlingen op het idee om de vierhoek in twee driehoeken te verdelen, met een diagonaal (figuur 4.16). En dan gaat de rest vanzelf...



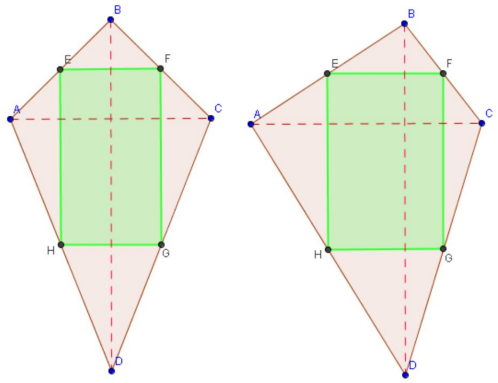
Figuur 4.16: *Bewijs van de stelling van Varignon*

Het bewijs dat $EFGH$ een parallellogram is:

1. $EF \parallel AC$ (middenparallel in driehoek ABC).
2. $HG \parallel AC$ (middenparallel in driehoek ADC).
3. Dus: $EF \parallel HG$
4. Analoog: $EH \parallel FG$.

Hiermee is bewezen dat $EFGH$ een parallellogram is.

Het is altijd interessant om op zoek te gaan naar speciale gevallen van een gevonden eigenschap. Ook dat is een aspect van wiskundig redeneren. Je kunt speciale gevallen nemen voor de gegeven vierhoek $ABCD$ en je afvragen wat het gevolg is voor de vierhoek $EFGH$. Het omgekeerde is nog interessanter: hoe moet je $ABCD$ nemen om ervoor te zorgen dat $EFGH$ een bepaalde speciale vorm aanneemt? Je kunt bv. een rechthoek verkrijgen door te starten met een vlieger of een ruit. Dat komt omdat de diagonalen dan loodrecht op elkaar staan. Maar: om een rechthoek te verkrijgen, volstaat dat de diagonalen van de oorspronkelijke vierhoek loodrecht op elkaar staan, en dat is ook bij andere vierhoeken dan vliegers het geval (figuur 4.17).



Figuur 4.17: *Varignon: een rechthoek verkrijgen*

Wil je een ruit verkrijgen, dan moet je vertrekken van een vierhoek met even lange diagonalen. Dat is het geval bij rechthoeken en gelijkbenige trapezia, maar ook bij andere vierhoeken (zie figuur 4.11 in 4.3.).

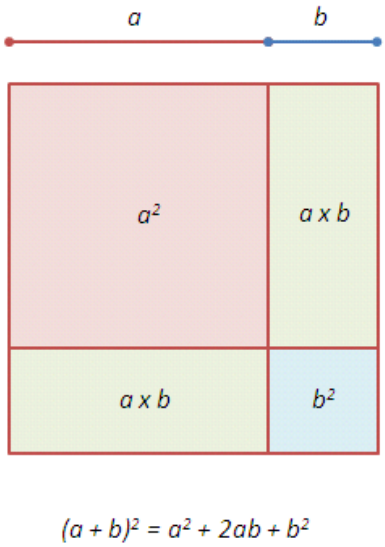
4.9 Bewijzen over en met oppervlakte

4.9.1 Bewijs zonder woorden: Het merkwaardig product $(a+b)^2$

De merkwaardige producten worden expliciet genoemd als een mogelijke algebraïsche eigenschap die bewezen kan worden. Uiteraard is dat iets dat je algebraïsch op een drafje bewezen krijgt met behulp van de distributiviteit:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Al vinden we hier dat je zeker het visuele bewijsje niet mag overslaan: neem een vierkant met zijde $a+b$, de oppervlakte van dit vierkant zal overeenkomen met het gezochte merkwaardige product $(a+b)^2$. Door de zijde te verdelen in een stuk a en een stuk b (de zijde is in totaal dus $a+b$ eenheden lang), kan je visueel heel goed zien dat de oppervlakte van het vierkant uiteenvalt in 2 vierkanten met als oppervlakte respectievelijk a^2 en b^2 en twee keer de congruente rechthoek met als oppervlakte $a\cdot b$. Al deze stukken moet je optellen om de totale oppervlakte $(a+b)^2$ te bekomen.

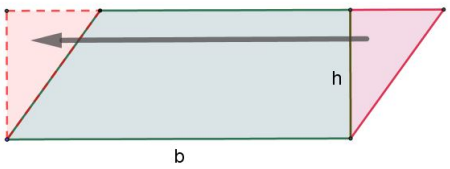


Figuur 4.18: *Bewijs zonder woorden voor* $(a+b)^2$

4.9.2 De oppervlakte van een driehoek en van een parallellogram

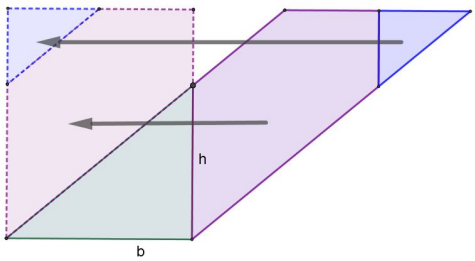
De oppervlakte van driehoeken en vierhoeken vormt een mooie, toegankelijke context voor eenvoudige, visuele bewijzen. Leerlingen kunnen bv. helemaal begrijpen waarom je voor de oppervlakte van een driehoek door 2 moet delen. In de ruimte is het fundamenteel moeilijker om te begrijpen waarom je voor het volume van een piramide door 3 moet delen; daar gaat het in het algemeen niet door te knippen en te plakken (zie Roelens & Willems, 2005). Gaan we ervan uit dat de oppervlakte van een rechthoek gekend is, dan kan hieruit door te knippen en te plakken de oppervlakte van een parallellogram afgeleid worden. Beschouw een gegeven parallellogram. Door een driehoekje uit te knippen en te verplaatsen, ontstaat een rechthoek met zelfde basis en hoogte als het gegeven parallellogram, dus:

$$A_{\text{parallellogram}} = \text{basis} \cdot \text{hoogte}.$$



Figuur 4.19: *De oppervlakte van een parallellogram*

Kritische leerlingen kunnen vragen: maar wat met een parallellogram dat 'te schuin' staat? Je kunt dan een andere zijde als basis nemen. Maar wat als je toch die basis wilt nemen? Dan maar een puzzel met meer stukjes.

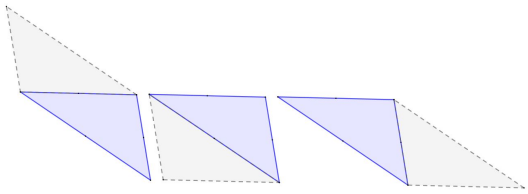


Figuur 4.20

Om de oppervlakte van een driehoek af te leiden van die van een parallellogram, zijn er verschillende mogelijkheden. Je kunt bv. van de gegeven driehoek en een kopie ervan, één parallellogram maken met zelfde basis en hoogte. De oppervlakte van de driehoek is de helft van die van het parallellogram, dus

$$A_{\text{driehoek}} = \frac{\text{basis} \cdot \text{hoogte}}{2}.$$

Merk op dat er hierbij veel mogelijkheden zijn (figuur 4.21). Je mag kiezen welke zijde je als basis kiest, de hoogte is dan de loodrechte afstand van het overstaande hoekpunt tot die rechte (de drager van die basis).



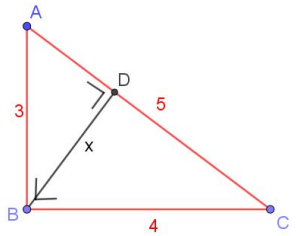
Figuur 4.21

Het 'recept' om de oppervlakte van een driehoek te berekenen, bestaat eerst en vooral uit het kiezen van een basis. De oppervlakte hangt niet af van welke basis je kiest. Dit kan heel nuttig zijn: om de hoogte uit B te vinden in de driehoek ABC van figuur 4.22, kun je de oppervlakte op twee manieren berekenen en gelijkstellen.

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot x}{2} \tag{4.1}$$

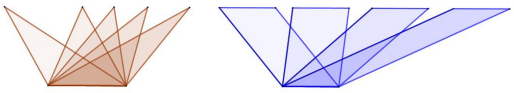
$$x = 2,4 \tag{4.2}$$

In de tweede graad kunnen de leerlingen deze oefening ook oplossen met gelijkvormige driehoeken, maar ik blijf de oplossing met oppervlakten gemakkelijker vinden.



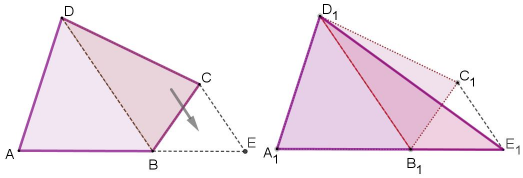
Figuur 4.22

Met deze formules voor de oppervlaktes van parallellogrammen en driehoeken is meteen de volgende eigenschap bewezen: "parallellogrammen (driehoeken) met een zelfde basis en gelijke hoogtes, hebben dezelfde oppervlakte" (zie figuur 4.23).



Figuur 4.23: *Zelfde oppervlakte*

Dit idee is belangrijk in de Euclidische meetkunde. Als een willekeurige vierhoek gegeven is, kun je hiermee een driehoek construeren met dezelfde oppervlakte. Omdat het construeren van evenwijdigen mogelijk is met enkel passer en liniaal, is hiermee aangetoond dat het omvormen van een vierhoek tot een driehoek met dezelfde oppervlakte, mogelijk is met passer en liniaal.



Figuur 4.24: *Van een vierhoek naar een driehoek met dezelfde oppervlakte*

Met analoge knip- en plakpuzzels kan de oppervlakte van een trapezium en van een ruit afgeleid worden uit die van rechthoeken, parallellogrammen en driehoeken.

4.9.3 De stelling van Viviani

We sluiten af met een verrassend eenvoudig bewijs voor een mooie stelling.

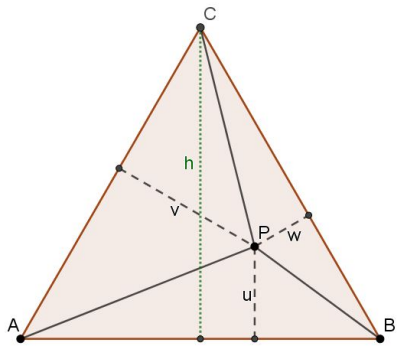
Stelling van Vincenzo Viviani (17de eeuw)
Gegeven: een gelijkzijdige driehoek ABC en daarbinnen een willekeurig punt P. Bewijs dat de som van de afstanden van P tot de zijden niet afhangt van P. Waaraan is die vaste afstandensom gelijk?

Als het waar is dat die som voor elk punt P dezelfde is, dan kan die som niet anders dan gelijk te zijn aan de hoogte h van de driehoek. Immers, als je P in één van de hoekpunten plaatst, is die som gelijk aan $0 + 0 + h = h$.

Het bewijs van de stelling is tegelijk creatief en eenvoudig. Verbind P met de hoekpunten. Op die manier ontstaan er drie deeldriehoeken ABP, BCP en CAP. Door uit te drukken dat de som van de oppervlakten van de deeldriehoeken gelijk is aan de oppervlakte van de hele driehoek, is het bewijs geleverd.

Noem $u = d(P, AB)$, $v = d(P, AC)$, $w = d(P, BC)$. De gelijke zijden $|AB|, |BC|$ en $|CA|$ noemen we z. Dan hebben we:

$$\frac{zu}{2} + \frac{zv}{2} + \frac{zw}{2} = \frac{zh}{2}$$
$$u + v + w = h.$$



Figuur 4.25: *Bewijs van de stelling van Viviani*

Hoofdstuk 5

Verzamelingenleer: operaties op 2 verzamelingen

In dit hoofdstuk maken we met veel plezier gebruik van Venndiagrammen, zij zijn een grafische voorstelling van de relaties tussen meerdere verzamelingen. Venndiagrammen zijn genoemd naar de Engelse wiskundige en filosoof John Venn, die ze omstreeks 1880 bedacht. Ze worden gebruikt in het onderwijs van elementaire verzamelingenleer en ter illustratie van eenvoudige relaties tussen verzamelingen.

5.1 Activiteit 1: Klassikale introductie rond de notie van verzamelingen

Een inleidende les rond verzamelingleer brengt best indirect de achterliggende ideeën aan achter verzamelingen, elementen van verzamelingen, unie en doorsnee aan. Concreet komen best volgende begrippen aan bod:

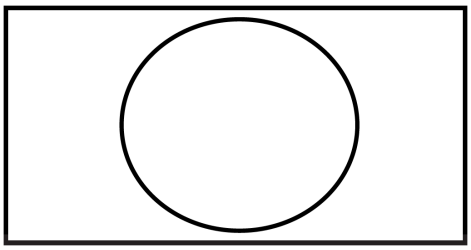
Doelstellingen

- Een verzameling is een duidelijk gedefinieerde groep van objecten,
- Een element is de naam dat we geven aan een object in een verzameling,
- De doorsnede van twee verzamelingen A en B is de verzameling van elementen die zowel tot A als B behoren,
- De unie van twee verzamelingen A en B is de verzameling van alle elementen die ofwel in A, ofwel in B behoren (of allebei).

Benodigdheden

- 3 hoepels voor op de grond of een tafel,
- Post-its met alle namen van de leerlingen,
- Een plaats (bv. meerdere tafels samenzetten) om de hoepels op te leggen (indien je niet met een bord werk.)

Instructies
Begin met een enkele hoepel te leggen zoals in onderstaande figuur.



Laat de cirkel nu verschillende verzamelingen representeren uit de leefwereld van de leerlingen. Bijvoorbeeld:

- De verzameling van alle leerlingen die naar de muziekschool gaan,
- De verzameling van alle leerlingen die Fortenite spelen,
- De verzameling van alle leerlingen die met de bus naar school komen,
- De verzameling van alle leerlingen met blauwe ogen,...

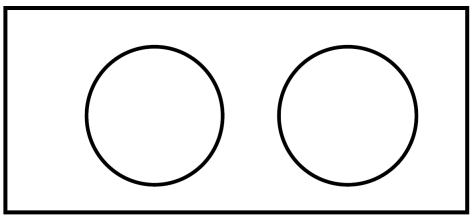
Als een student tot een verzameling behoort, dan plaatsen ze hun post-it in de hoepel. Als een student niet tot de verzameling behoort, dat plakken ze hun post-it buiten de hoelahoep.

Merk op 5.1.1

De plaats buiten de hoelahoep stelt eigenlijk de 'universele verzameling' voor. De universele verzameling is de groep van alle objecten. In bovenstaande activiteit komt die overeen met de verzameling van alle namen van de leerlingen.

In de loop van de activiteit, kan je de term 'element' stichten. Introduceer deze term op een concrete manier zodanig dat leerlingen er zich iets bij kunnen voorstellen, bijvoorbeeld 'neem de verzameling van alle leerlingen die fan zijn van LikeMe' en zeg bijvoorbeeld dat 'Adam' een **element** is van deze verzameling. Als de les verder gaat vraag je studenten af en toe 'Geef eens een element van deze verzameling?' elke keer je een nieuwe verzameling maakt.

Vervolgens plaatsen we twee hoepels zoals in onderstaande figuur:



Elke hoepel stelt opnieuw een verzameling voor. Bijvoorbeeld de ene hoepel is de verzameling van alle studenten met blond haar en de andere hoepel alle studenten met bruin haar. Laat opnieuw studenten post-its kleven in de hoepels als ze tot één van de twee verzamelingen horen of buiten de hoepels als ze in geen van beide verzamelingen horen.

Merk op 5.1.2

Bij de eerste introductie van een tweede hoepel houden we de verzamelingen bewust disjunct: ze bevatten expliciet geen overlappende elementen.

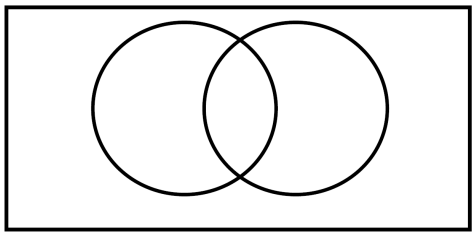
Lok nu in een volgende fase discussie uit bij de leerlingen door 2 verzamelingen te kiezen waarbij studenten gelijktijdig een element kunnen zijn van beide verzamelingen. Bijvoorbeeld: één hoepel stelt de verzameling voor van alle leerlingen die met de bus naar school komen en de andere hoepel alle leerlingen die naar Netflix kijken.

Merk op 5.1.3

De bedoeling is nu expliciet dat er discussies uitbarsten tussen de leerlingen. Ze moeten zich afvragen wat ze moeten doen als ze tot beide verzamelingen behoren.

Wanneer de studenten door hebben dat ze met het probleem geconfronteerd worden dat ze een element zijn van 2 verzamelingen tegelijkertijd, vraag hen dan: *Denk je dat er een manier is hoe we de hoepels kunnen schikken zodanig dat klasgenoten zowel met de bus naar school kunnen komen als Netflix kijken?*

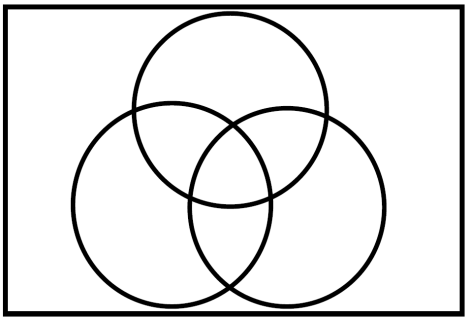
Ga in op zoveel mogelijk suggesties van de leerlingen, probeer (en becommentarieer) elke opstelling tot ze tot volgend eindresultaat komen:



Probeer nog enkele combinaties van verzamelingen die een niet-ledige doorsnede veroorzaken. Combinaties van oog- en haarkleur werken hier meestal goed voor.

Introduceer nu de term 'doorsnede' waarbij je uitlegt dat de plek waar de cirkels overlappen een verzameling op zich is dat wij de doorsnede gaan noemen. Als de les verder gaat vraag je studenten af en toe "Geef eens een element uit de doorsnede van deze twee verzamelingen?"

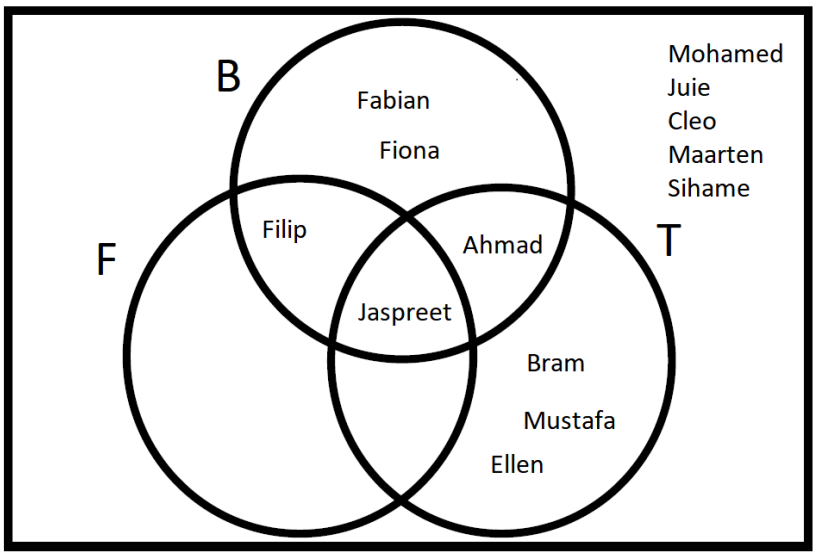
Vraag vervolgens aan studenten hoe ze een combinatie van 3 veramelingen zouden maken. 'Waar zou jij de derde hoepel plaatsen?' Overloop opnieuw verschillende mogelijkheden die vanuit de leerlingen komen tot ze komen tot:



Probeer opnieuw een combinatie van 3 verzamelingen uit, liefst een combinatie waarbij op elke plek wel een leerling staat. Bv. Een verzameling van leerlingen die naar Karrewiet kijken, leerlingen die naar Buck kijken en leerlingen die naar Thuis kijken.

Tijd voor abstractie

Het is nu tijd voor een kleine abstractielaag te leggen rond de activiteit die je net deed. Laat het laatste voorbeeld op de grond liggen. Onderstaand toon je een voorbeeld waarbij 3 verschillende verzamelingen vervoersmiddelen voorstellen die leerlingen minstens 1 keer per maand gebruiken om naar school te komen. Hierbij is B is de verzameling van alle leerlingen die minstens 1 keer per maand met de bus kom, T met de trein en tenslotten F met de fiets:



Er zijn ook leerlingen die uitsluitend tot het universum U behoren, zij komen bv. altijd te voet of met de wagen naar school. Het is nu tijd om symbolen te introduceren:

- Alle leerlingen die minstens 1 keer de trein **en** de bus nemen, komt overeen met de **doorsnede** tussen B en T. We zijn immers op zoek naar leerlingen die op een maand zowel de trein als bus gebruiken (de fiets kan, maar hoeft daar niet per se deel van uit te maken):
$$B \cap T = \{\text{Jaspreet, Ahmad}\}$$
- Alle leerlingen die minstens 1 keer de trein **of** de bus nemen, komt overeen met de **unie** van de verzamelingen B en T. We zijn immers op zoek naar leerlingen die ofwel een element zijn van de maandelijkse busgebruikers of wel een element zijn van de maandelingse treingebruikers:
$$B \cup T = \{\text{Filip, Fabian, Fiona, Jaspreet, Ahmad, Bram, Mustafa, Ellen}\}$$
- Alle leerlingen die maandelijks de trein nemen maar **niet** de bus komt overeen met het verschil van T met B. We nemen alle elementen die in T zitten (de treingebruikers) maar laten daarbij alle busgebruikers weg. We verkrijgen:
$$T \setminus B = \{\text{Ellen, Mustafa, Bram}\}$$

- Merk op dat alle fietsgebruikers ook zeker maandelijks eens de bus nemen, bijgevolg zijn de maandelijkse fietsgebruikers een **deelverzameling** van de maandelijkse busgebruikers, of nog:
$$F \subset B$$
- Merk op dat sommige treingebruikers enkel de trein gebruiken en geen andere vervoersmiddelen. Bijgevolg is T noch een deelverzameling van B, noch een deelverzameling van F:
$$T \not\subset B \quad \text{en} \quad T \not\subset F$$
- enz...

5.2 Activiteit 3: Getalverzamelingen

In de meeste handboeken wordt er vooral gretig gewerkt met operaties 2 getalverzamelingen. We willen nogmaals benadrukken (zie Hoofdstuk 2) dat de eindterm niet verplicht om met alle leerlingen getalverzamelingen te beschouwen, voor de zwakkere A-stroom leerlingen kan dat immers snel te moeilijk worden. We geven toch enkele voorbeelden van hoe je ze zou kunen inzetten.

Bijvoorbeeld: bepaal via opsomming volgende verzamelingen:

- $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \ldots$
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \ldots$
- $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \ldots$
- $\mathbb{N} \cap \{0\} = \ldots$

Of bepaal of volgende verzamelingen een deelverzameling ($\subset$) zijn of niet ($\not\subset$):

- $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \ldots \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{Z}$
- $\{0, 1, 2, 3\} \ldots \mathbb{N}$

Of bepaal of volgende elementen element zijn ($\in$) of niet ($\notin$) van de gegeven verzameling:

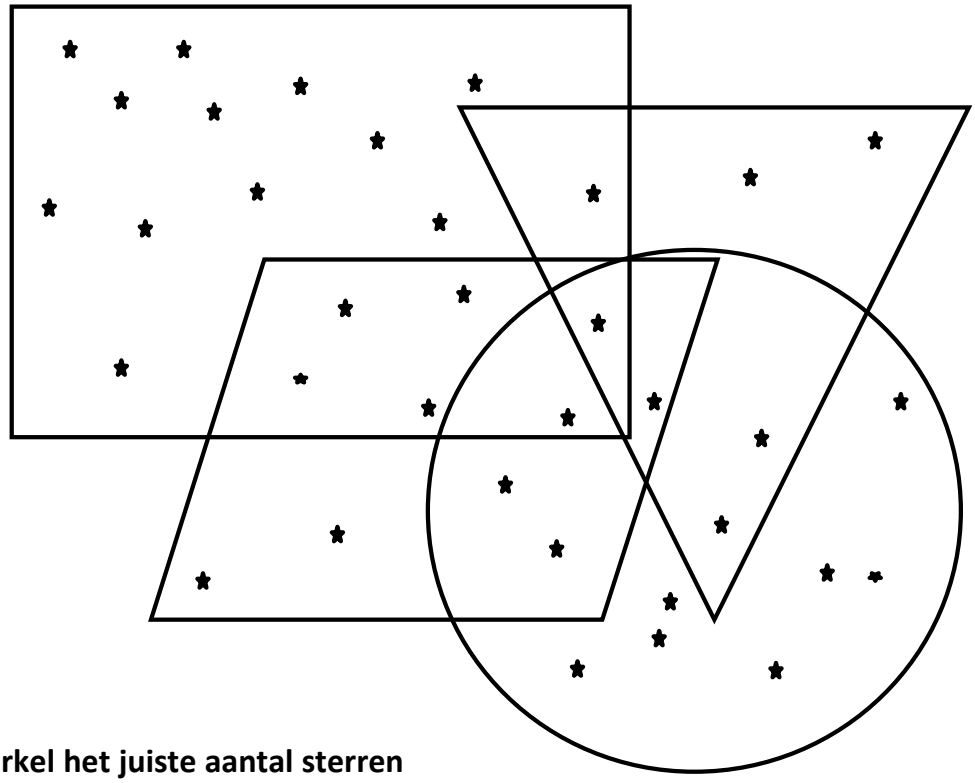
- $0,5 \ldots \mathbb{N}$
- $-\frac{1}{5} \ldots \mathbb{Z}$
- $0 \ldots \mathbb{Z}^+$

We gaven bovenstaande voorbeelden enkel ter inspiratie, ze zijn goed gekend en verspreid via de gangbare handboekenreeksen.

5.3 Activiteit 3: Sterren jagen

Een prachtige oefening om mee naar huis te nemen vind je onderstaand:

STERREN JAGEN



Omcirkel het juiste aantal sterren

a) In de ○ maar niet ▽, ▱ of ▭ 6 8 7

b) In de ▽ maar niet in ○, ▱ of ▭ 3 5 2

c) In de ▱ maar niet in ▭, ○ of ▽ 2 3 11

d) In de doorsnede van ○ en ▽ maar niet in ▱ of ▭ 12 2 4

e) In de doorsnede van ▭ en ▱ maar niet in ▽ of ○ 4 6 10

f) In de doorsnede van alle figuren 1 2 9

Oplossingen: a)7, b) 2, c)2, d) 2, e) 4, f)1

5.4 Activiteit 4: Vlugge verzamelingen

Deze erg competitieve activiteit leert leerlingen werken met verzamelingen.

Instructies
Deze activiteit is een erg competitieve taak waarbij teams tegen elkaar spelen. Elk team bevat 3 à 4 leerlingen. Er kunnen dus verschillende teamduo's het tegen elkaar opnemen tegelijkertijd. Voorzie een tafel per 2 teams. Als je tijd hebt, kan je een een heuze liga van maken waarbij winnaars tegen winnaars spelen in de volgende ronde. Leg de regels duidelijk uit.

Spelregels
Elk team heeft 3 sets van meerkleurige vormen gesorteerd per vorm. Je moet de vormen sorteren in verzameling zoals aangeven op de kaartjes. Maak gebruik van het correcte Venndiagram.

Je concurrerende team en je eigen team leggen samen een kaartje open. Dan begint een ronde. De bedoeling is om ter snelst de verzamelingen te maken op het kaartje. Het groepje dat klaar is, klapt tweemaal in de handen. Is het correct? Dan verdienen jullie een punt. Is het fout? Dan gaat het punt naar de andere groep.

Afspraken binnen de teams

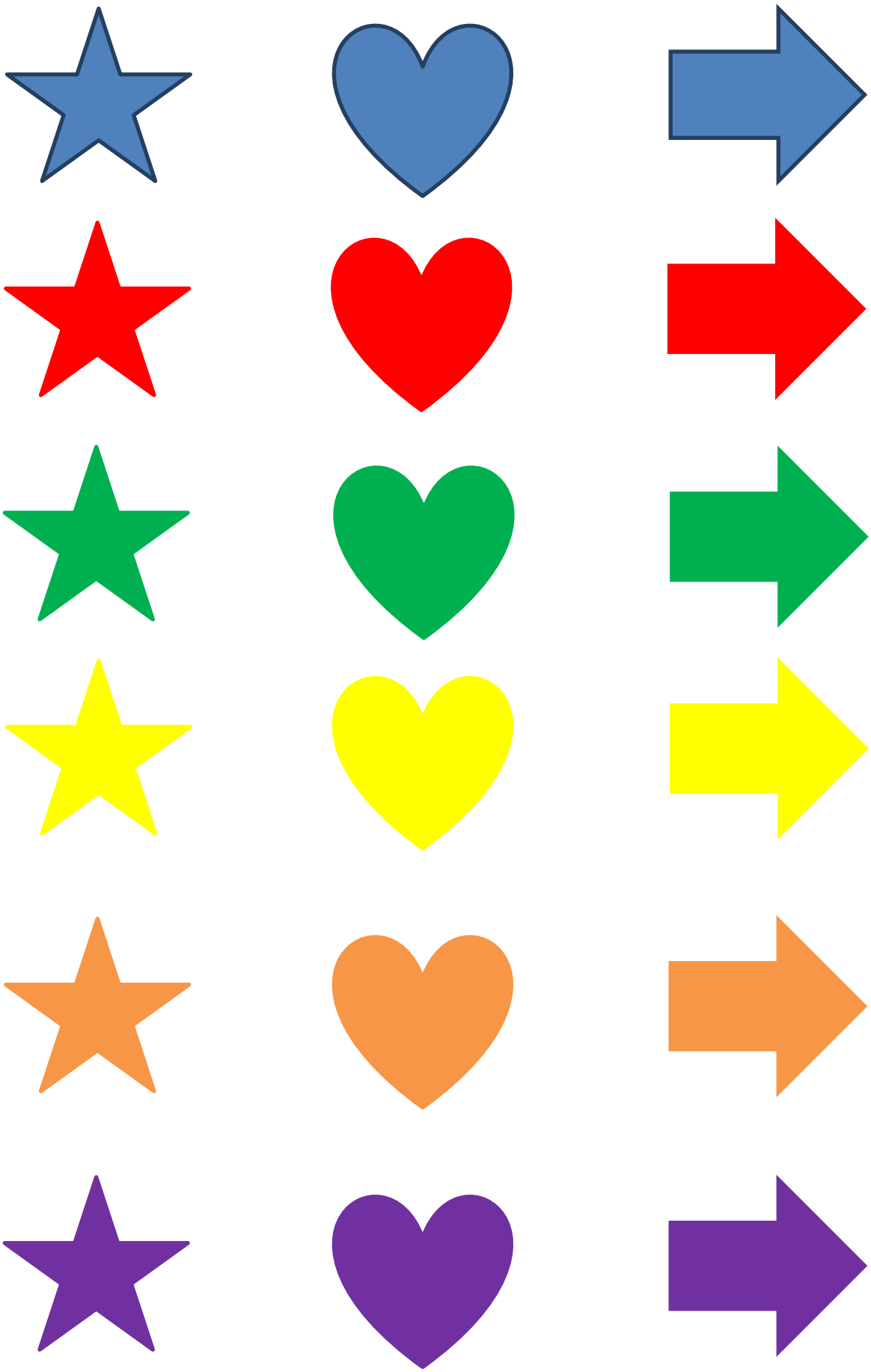
- Elk team kiest per ronde één iemand als **sorteerder** (kies bij elke ronde een ander teamlid). De sorteerder is de **enige** die de vormen mag aanraken. Andere teamleden kunnen tegen hen praten maar mogen de vormen **niet aanraken**.
- Enkel als beide teams klaar zijn, is de ronde voorbij.
- Wanneer de sorteerder denkt dat de groep klaar is en de verzamelingen correct heeft gemaakt, klapt de sorteerder in zijn handen. Zijn jullie het snelst en correct, gaat het punt naar jullie. Klapten jullie in je handen en de oefening is fout? Dan krijgt het andere team een punt. De leerkracht kan je steeds de oplossingen geven.

Benodigdheden

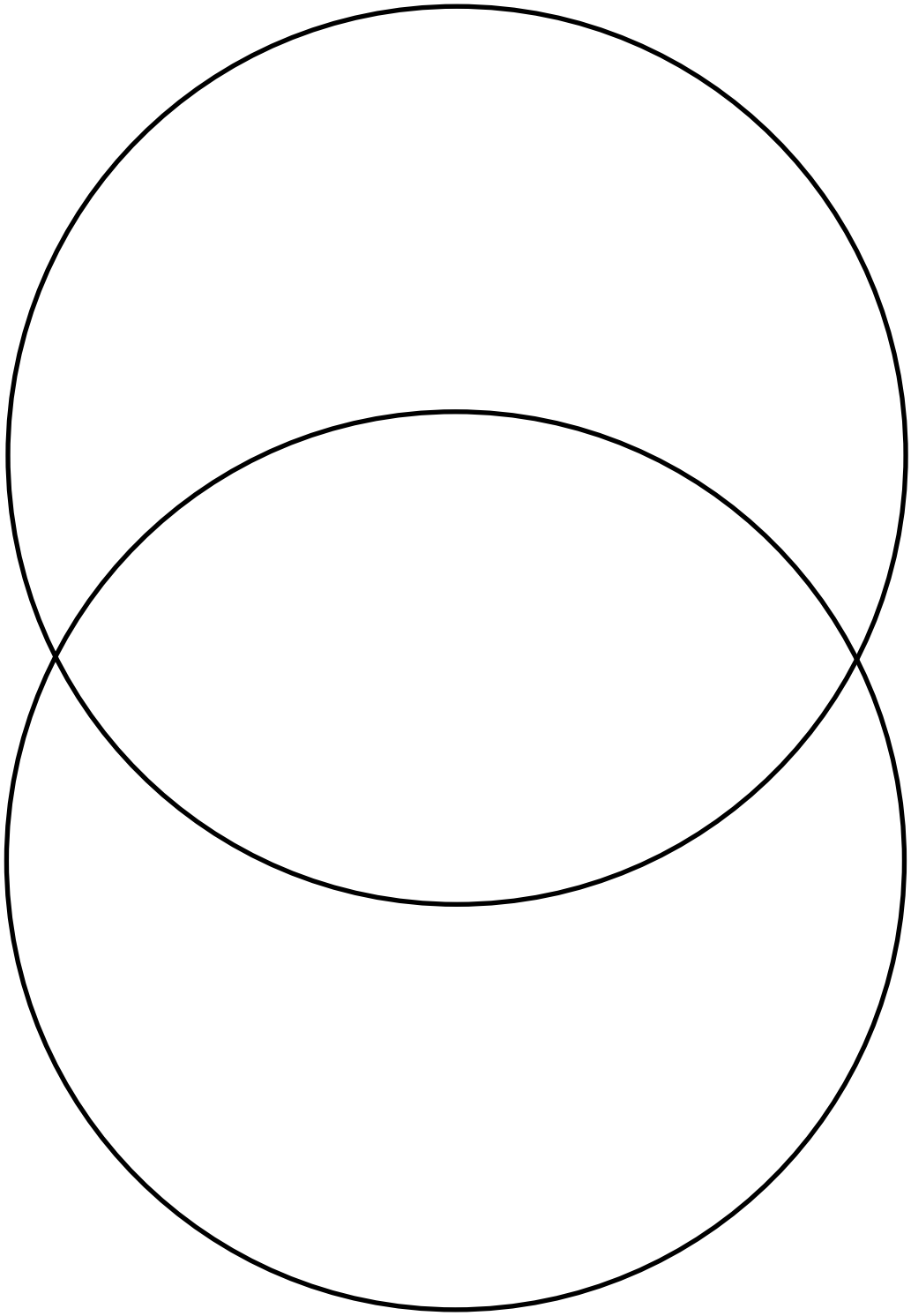
- **Template 1**: vormen afdrukken en knippen voor elk team
- **Template 2**: op de banken leggen voor elk team
- **Template 3** vraagkaartjes maken van de vragen per 2 teams.

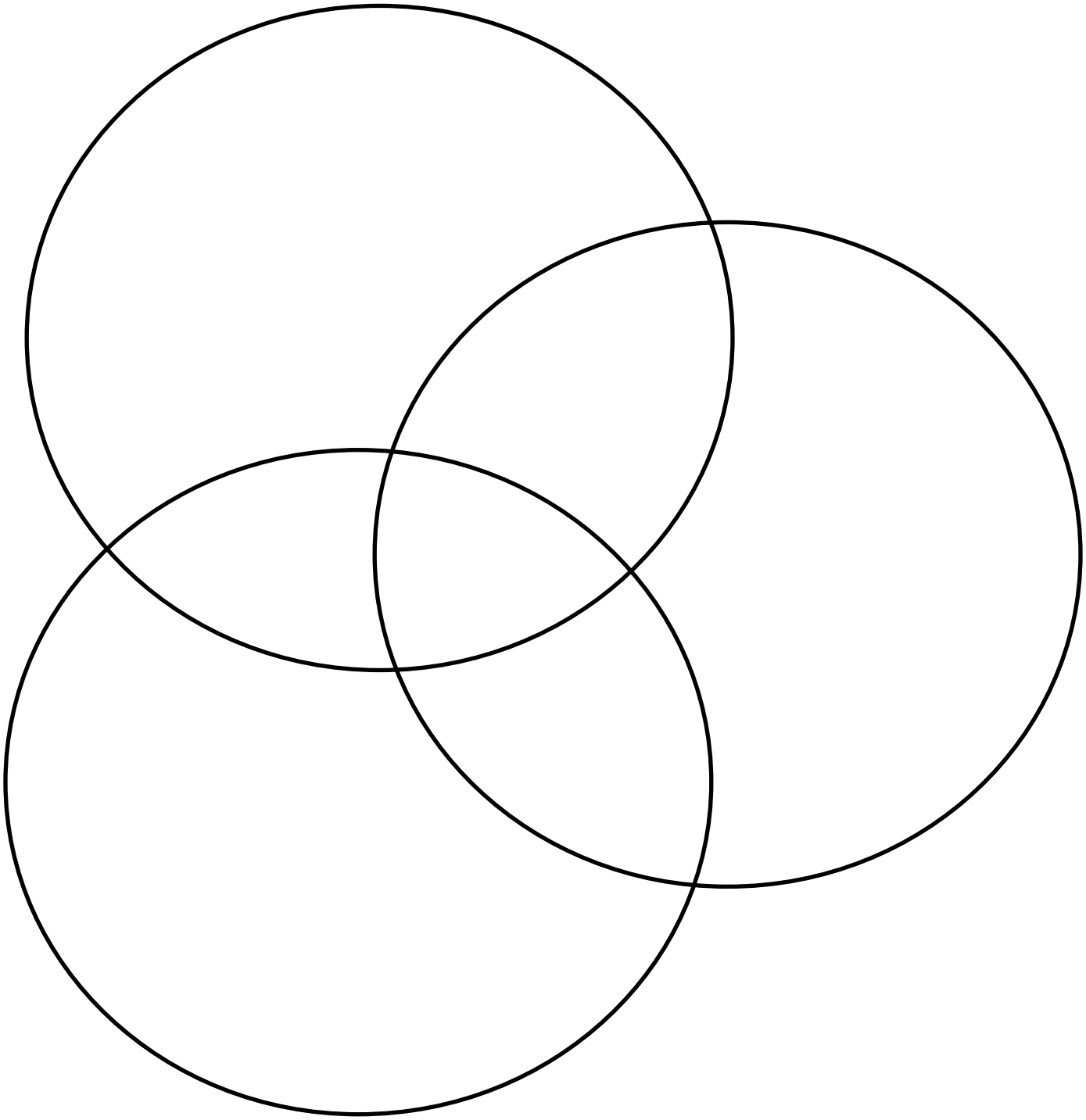
De templates en de oplossingen vind je op volgende bladzijden.

Template 1



Template 2





Template 3

1.

A={Verzameling alle harten},

B={Verzameling alle blauwe vormen}

2.

A={Verzameling alle sterren},

B={Verzameling alle pijlen}

3.

A={Verzameling alle pijlen}

B={Verzameling alle harten}

C={Verzameling alle rode vormen}

4.

A={Verzameling van alle gele vormen}

B={Verzameling van alle harten}

C={Verzameling alle gele vormen}

5.

A={Verzameling alle rode harten}

B={Verzameling alle blauwe harten}

C={Verzameling alle blauwe vormen}

6.

A={Verzameling alle groene sterren}

B={Verzameling alle groene vormen}

7.

A={Verzameling alle harten}

B={Verzameling alle blauwe harten}

C={Verzameling alle blauwe vormen}

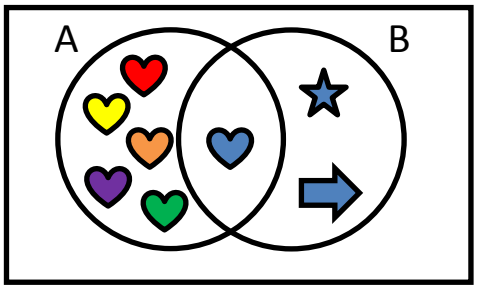
8.

A={Verzameling alle vormen}

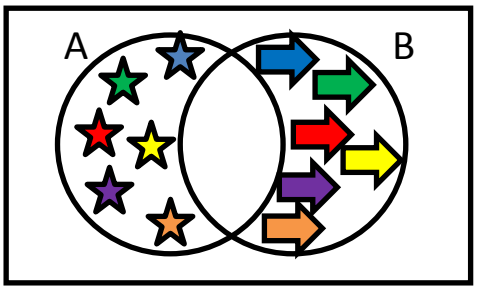
B={Verzameling alle sterren}

Oplossingen

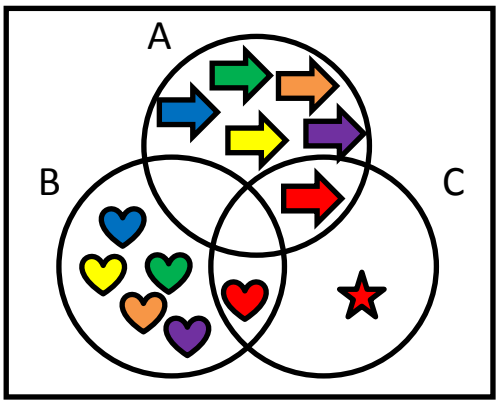
1. A={Verzameling van alle harten},
   B={Verzameling van alle blauwe vormen}



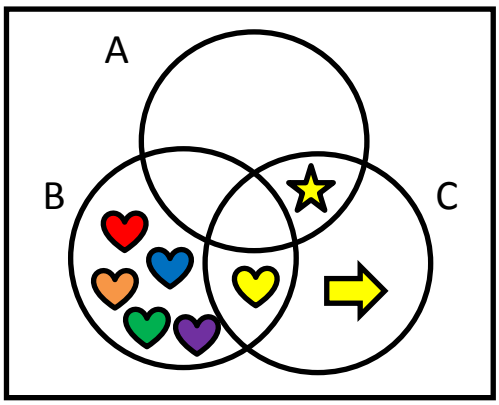
2. A={Verzameling van alle sterren},
   B={Verzameling van alle pijljen}



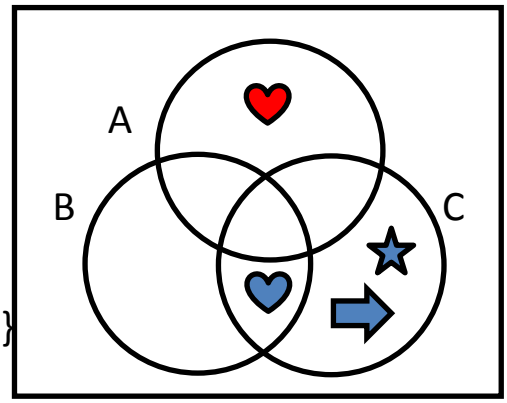
3. A={Verzameling van alle pijlen}
   B={Verzameling van alle harten}
   C={Verzameling van alle rode vormen}



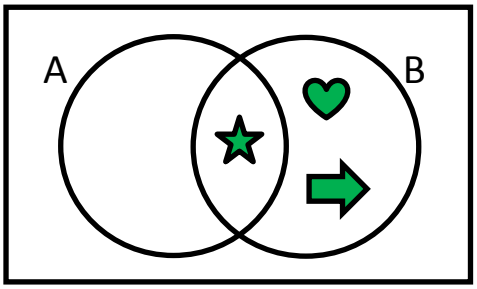
4. A={Verzameling van alle gele vormen}
   B={Verzameling van alle harten}
   C={Verzameling van gele vormen}



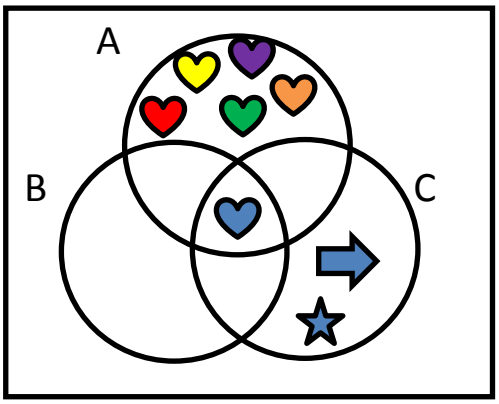
5. A={Verzameling alle rode harten}
   B={Verzameling alle blauwe harten}
   C={Verzameling alle blauwe vormen}



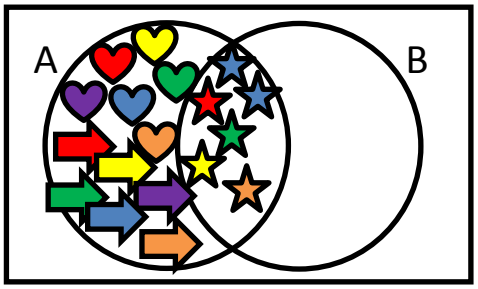
6. A={Verzameling alle groene sterren}
   B={Verzameling alle groene vormen}



7. A={Verzameling alle harten}
   B={Verzameling alle blauwe harten}
   C={Verzameling blauwe vormen}



8. A={Verzameling alle vormen}
   B={Verzameling alle sterren}



Bibliografie

[De Bock, 1990] De Bock, D., Roelens M. 1990. Vierhoeken: een verslag van een groepswerk. *Uitwiskeling 6/4.*

[de Villiers, 2006] de Villiers, M. 2006. Rol en functie van het bewijs in de dynamische meetkunde. *Euclides 81/4.*

[Depoorter J., 2012] Depoorter J., Roelens M., Verbeeck G. 2012. Goochelen in de wiskundeles. *Uitwiskeling 28/2.*

[Eggermont H., 1995] Eggermont H., Roelens M. 1995. Getallen en meetkunde in de eerste graad. *Uitwiskeling 11/4.*

[Eggermont H, 2014] Eggermont H, Roelens M. 2014. Meetkundige plaatsen. *Uitwiskeling 30/2.*

[Grand'Henry Krysinska, 2018] Grand'Henry Krysinska, M. 2018. Production des premières expressions littérales dans le cadre des suites figurées. *Losanges 41.*

[M., 1997] M., Serra. 1997. Discovering geometry. An inductive approach. *Emeryville, California: Key Curriculum Press.*

[Math4All, n.d.] Math4All. Getaltheorie: Gehele getallen. *www.math4all.nl.*

[Op de Beeck, 1998] Op de Beeck, R., Roelens M. 1998. Bewijzen, wie heeft er iets aan? *Uitwiskeling 15/1.*

[Op de Beeck, 2010] Op de Beeck, R, Willems J. 2010. Patronen leren herkennen in de eerste en tweede graad. *Uitwiskeling 26/1.*

[Padilla, 2019] Padilla, T. (s.d.). 2019. Divisibility trickx, filmpje met goocheltoer gebaseerd op deelbaarheidskenmerk. *Numberphile.*

[Roelens, 2008a] Roelens, Michel. 2008a. Maar waarom? Bewijzen en redeneren in de onderbouw. *Plenaire lezing op de jaarvergadering van de Nvw.*

[Roelens, 2008b] Roelens, Michel. 2008b. Som van de hoeken vna een driehoek: een interessant fout bewijs. *Uitwiskeling 24/2.*

[Roelens, 2019] Roelens, Michel. 2019. Redeneren en bewijzen in de eerste graad. *Uitwiskeling 35/2.*

[Roelens M., 2005] Roelens M., Willems J. 2005. Oppervlakte en volume door de eeuwen heen. *Uitwiskeling 21/3.*

[Schatteman, 2010] Schatteman, Anne. 2010. Als we kiezen voor bewijzen, laten we dan niet toveren. *Dag van de Wiskunde, Kortrijk.*

[Schooltv.nl, 2007] Schooltv.nl. 2007. Clip: Waarheid lijkt vanzelfsprekend, maar in de wiskunde ligt dat toch wat ingewikkelder. Hoe? *Schooltv.*

[v, 2006] v. 2006. Bewijzen: voor alle zekerheid. *Euclides 81/4.*